

الدكتور خالد رشدي بركات

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
في جامعة دمشق

مسائل

في

الهندسة الوصفية

الطبعة السادسة

في التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

منشورات جامعة دمشق

١٤١٨ - ١٤١٩ هـ

١٩٩٧ - ١٩٩٨ م



الطبعة الأولى
خالد رشدي بركات
كلية الهندسة المعمارية والكمبيوتر
جامعة دمشق

مسائل

في

الهندسة الوصفية

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لمجموعة دمشق

مقدمة

إن هذا الكتاب معد لطلبة المعاهد والكليات الهندسية على مختلف تخصصاتهم الذين يقومون بداسة مادة الهندسة الوصفية .

في بداية كل بحث من هذا الكتاب أوردنا شرحاً نظرياً مقتضباً أتبعناه بمجل أمثلة نموذجية تُعرِّف الطالب على طريقة حل المسائل ورسم مخططاتها يليها مجموعة كافية من المسائل غير المحلولة . كما أنه في بعض الأبحاث أضفنا إلى هذا كله أسئلة يجيب عليها الطالب ليتأكد من استيعابه للموضوع .

نصح الطلبة المبتدئين بداسة مادة الهندسة الوصفية باتباع الطريقة التالية :

- ١ - دراسة القسم النظري من البحث في الكتب النظرية .
- ٢ - قراءة الشرح النظري المقتضب الذي أوردناه في بداية كل بحث والإجابة على الأسئلة المتعلقة به .
- ٣ - القيام بجميع الإنشاءات المتعلقة بالأمثلة المحلولة حسب الشرح .
- ٤ - حل المسائل غير المحلولة حسب توجيهات المدرس .

يحتوي هذا الكتاب على ما ينوف عن ألف مسألة محلولة وغير محلولة وإن احتواه على هذا العدد الضخم من المسائل ليسهل على المدرس اختيار المسائل اللازمة للتأوين والوظائف البيتية والمذاكرات والإمتحانات مما يجعله ضرورياً لا غنى عنه ليس للطلبة فحسب بل وللمدرسي المادة .

الفصل الاول

البحث الأول

المفاهيم الرئيسية للإسقاط القائم

أسئلة للاختبار الشخصي

ارسم مستويين معتبرين في الإسقاط القائم كمستوي إسقاط ، دوّن عليها التسميات والرموز والحقول والزوايا (الشكل ١ ، ٢) . ثم أجب على الأسئلة التالية :

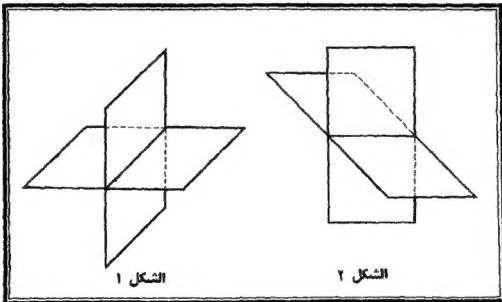
١ - ما هو خط الأرض ؟

٢ - أي حقول مستويات الإسقاط تحدد الزوايا الفراغية : الأولى ، الثانية ،

الثالثة ، الرابعة ؟

٣ - ماذا يستخدم كحدود بين الزوايا الفراغية المذكورة : الأولى والثانية ،

الثالثة والرابعة ، الأولى والرابعة ، الثانية والثالثة ؟



٤ - عدد الزوايا الفراغية الكائنة فوق مستوى الإسقاط الأفقي ، تحت مستوى الإسقاط الأفقي ، أمام مستوى الإسقاط الشاقولي ، خلف مستوى الإسقاط الشاقولي ؟

٥ - ماهي وضعية نقطة كائنة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع بالنسبة لمستويات الإسقاط ؟

٦ - أين تقع نقطة موجودة بين الربع الأول والرابع ، وبين الثاني والثالث ، وبين الأول والثاني وبين الثالث والرابع ؟

٧ - أين تقع نقطة موجودة على حدود جميع الأرباع الأربعة ؟

٨ - ماذا ندعو بالإسقاط القائم لنقطة فراغية على مستوى ما ؟

٩ - ماذا ندعو بالمسقط الأفقي لنقطة ، المسقط الشاقولي لنقطة ؟

١٠ - في أي الحقل تقع مساقط نقطة ما كائنة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ؟

١١ - أين توجد مساقط نقطة واقعة في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي ، في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي ، على خط الأرض ؟

١٢ - ماهي ميزة جميع نقاط مستوى الإسقاط الأفقي ، مستوى الإسقاط الشاقولي ؟

١٣ - أين يمكن أن توجد نقطة إذا كان مسقطها الأفقي واقعاً في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي ، وإذا كان مسقطها الشاقولي واقعاً في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي ، في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي ؟

١٤ - ماهو مخطط النقطة وكيف يمكن أن نتنتل من الصورة الفراغية إلى المخطط ؟

١٥ - أي حقل مستويات الإسقاط ستقع بعد إنطباقها فوق خط الأرض ،
تحت خط الأرض ؟

١٦ - أين توجد نقطة إذا كان مسقطها الأفقي على المخطط واقعاً فوق خط
الأرض ، تحت خط الأرض ، وإذا كان مسقطها الشاقولي واقعاً فوق خط الأرض ،
تحت خط الأرض ؟

البحث الثاني

النقطة

نرمز لنقاط الفراغ بأحرف لاتينية كبيرة A, B, C, D, E, F, \dots
نرمز لمساقط هذه النقاط بأحرف صغيرة a, b, c, d, e, f, \dots
تُروى رموز المساقط الشاقولية تمييزاً عن رموز المساقط الأفقية بالإشارة ' ،
(فتحة) . مثال : المسقط الأفقي لنقطة A يرمز له بالحرف a ، وأما المسقط
الشاقولي فيرمز له بالحرف a' .

إن كلا مسطقي النقطة الواحدة « الأفقي والشاقولي » يقعان على محور واحد
على خط الأرض .

على المخطط

في الفراغ

١ - النقطة في الربع الأول المسقط الأفقي للنقطة يقع تحت خط الأرض
المسقط الشاقولي للنقطة يقع فوق خط الأرض

٢ - النقطة في الربع الثاني المسقطان « الأفقي والشاقولي » يقعان
فوق خط الأرض .

٣ - النقطة في الربع الثالث المسقط الأفقي للنقطة يقع فوق خط الأرض

المسقط الشاقولي للنقطة يقع تحت خط الأرض .

٤ - النقطة في الربع الرابع المسقطان « الأفقي والشاقولي » يقعان تحت

خط الأرض .

إن أي نقطة من مستوي الإسقاط الأفقي لها مسقط شاقولي يقع على خط الأرض
وإن أي نقطة من مستوي الإسقاط الشاقولي لها مسقط أفقي يقع على خط الأرض .
إذا انطبق مسقطا نقطة على خط الأرض فالنقطة ستكون على خط الأرض .

البعد y - من المسقط الأفقي للنقطة حتى خط الأرض - يساوي إلى بعد النقطة
نفسها عن مستوي الإسقاط الشاقولي .

البعد z - من المسقط الشاقولي للنقطة حتى خط الأرض - يساوي إلى بعد
النقطة نفسها عن مستوي الإسقاط الأفقي .

الإحداثية z موجبة لجميع النقاط الواقعة فوق مستوي الإسقاط الأفقي
وسالبة لجميع النقاط الواقعة تحت مستوي الإسقاط الأفقي .

الإحداثية y موجبة لجميع النقاط الواقعة أمام مستوي الإسقاط الشاقولي
وسالبة لجميع النقاط الواقعة خلف مستوي الإسقاط الشاقولي .

اسئلة للاختبار الشخصي

أعط أجوبة تامة على الأسئلة التالية :

١ - كيف نرمز لنقاط الفراغ ؟

٢ - كيف نرمز لمساقط نقطة فراغية وكيف يميز بين هذه المساقط ؟

٣ - كيف تقع على الخطوط مساقط النقطة الواحدة الفراغية بالنسبة لخط الأرض ؟

٤ - هل للمنحطوط معنى عندما تكون الأعمدة النازلة من مساقط نقطة على خط الأرض غير منطبقة على بعضها ؟

٥ - ماذا نفهم من العبارة : (معطاة نقطة فراغية) ؟

٦ - أين تقع على المنحطوط مساقط نقطة ما موجودة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ؟

٧ - أي النقاط في الفراغ يحتل فيها لمنطبق مسقطها الأفقي والشافولي على خط الأرض ؟

٨ - كيف تعيد وضعية نقطة فراغية حسب مساقطها ؟

٩ - أين تقع على المنحطوط مساقط نقطة موجودة في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل العادي لمستوي الإسقاط الشافولي ، في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشافولي ؟

١٠ - كيف نرمز لبعد نقطة في الفراغ عن مستوي الإسقاط الأفقي ، عن مستوي الإسقاط الشافولي ؟

١١ - بماذا يقاس البعد على المنحطوط بين النقطة في الفراغ ومستوي الإسقاط الأفقي ، ومستوي الإسقاط الشافولي ؟

١٢ - في أي الزوايا الفراغية تكون الإحداثية z للنقطة موجبة ، سالبة ؟

١٣ - في أي الزوايا الفراغية تكون الإحداثية y للنقطة موجبة ، سالبة ؟

١٤ - ماهي إشارات الإحداثيات z, y لنقطة تقع في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ؟

١٥ - ماهي الإحداثية التي تعين على المنحطوط المسقط الأفقي للنقطة ، المسقط الشافولي للنقطة ؟

١٦ - كيف نأخذ على المخطط قطعة تعين الإحداثية z إذا كانت موجبة ،
سالبة ، و قطعة تعين الإحداثية y إذا كانت موجبة ، سالبة ؟

أمثلة

● المثال ١ : ارسم غطط نقطة ما A موجودة في الربع الثاني وتبعد عن مستوي الإسقاط الأفقي بمقدار 32 mm وعن مستوي الإسقاط الشاقولي بمقدار 18 mm (الشكل ٣) .

الحل : نأخذ على خط الأرض نقطة ما a ثم نرسم منها عموداً على خط الأرض .
المستطمان (a, a') للنقطة المبحوث عنها A سوف يقعان على هذا العمود فوق خط الأرض ، فلكي نضمن الأبعاد المفروضة من النقطة وحتى مستويات الإسقاط يجب أن يكون البعد من المسقط الأفقي للنقطة حتى خط الأرض مساوياً 18 mm (البعد بين النقطة ومستوي الإسقاط الشاقولي) أما المسافة بين المسقط الشاقولي للنقطة وخط الأرض 32 mm (البعد بين النقطة ومستوي الإسقاط الأفقي) . والآن يبقى أن نأخذ على العمود من الجهة العليا اعتباراً من a قطعة بطول 18 mm فنحصل بذلك على المسقط الأفقي (a) للنقطة ، وبعد ذلك نأخذ من الجهة العليا قطعة بطول 32 mm فنحصل على المسقط الشاقولي (a') .

● المثال ٢ : أنشئه غطط نقطة ما A (24 , - 18) (الشكل ٤) .

الحل : بما أن إحداثيات النقطة (a, a') سالبة لذا فالنقطة موجودة خلف مستوي الإسقاط الشاقولي وتحت مستوي الإسقاط الأفقي أي في الربع الثالث .

لنأخذ نقطة ما a على خط الأرض ، ولنرسم منها عموداً على خط الأرض ، ثم نأخذ عليه من الجهة العليا قطعة $a_1 a$ بطول 24 mm (y) ومن الجهة السفلى

a, a' بطول 13 mm (z) فاسط النقطة الحاصلة توافق وضعية النقطة في الربع الثالث .

● المثال ٣ : لدينا المسط الأفقي (a) للنقطة A الموجودة في الربع الثالث . أنشئ مسطها الشاقولي (a') وفقاً للشرط $z = y + 15 \text{ mm}$ (الشكل ٥) .

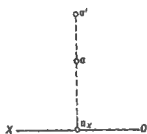
الحل : إن المسط الشاقولي للنقطة المطلوبة يجب أن يقع تحت خط الأرض ، وعلى خط مستقيم مار من المسط الأفقي المعطى للنقطة والعمود على خط الأرض . البعد من المسط الأفقي للنقطة حتى خط الأرض يقاس بالبعد من النقطة A حتى مستوي الإسقاط الشاقولي (y) . بناء عليه للحصول على المسط الشاقولي (a') للنقطة يكفي أن نمر من المسط الأفقي (a) عموداً على خط الأرض ونعين عليه اعتباراً من النقطة a_2 ونحو الأسفل قطعة $a_2 a'$ بطول $a_2 a + 15 \text{ mm}$.

● المثال ٤ : لدينا نقطة A (12 , 20) . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة A بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٦) ، مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٧) ، خط الأرض (الشكل ٨) .

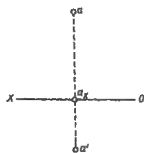
الحل : النقطة (a, a') مطاة في الربع الأول .

١ - النقطة التي تناظرها بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي موجودة في الربع الرابع أي (12 و - 20) B ننشئ مخطط النقطة (a, a') ونعين على عمود عام ونحو الأسفل قطعة $a_2 b$ بطول 12 mm (y) ، وقطعة $a_2 b'$ بطول 20 mm (z) .

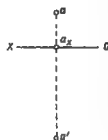
٢ - النقطة التي تناظرها بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي موجودة في الربع



الشكل ٢



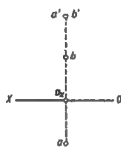
الشكل ٣



الشكل ٤



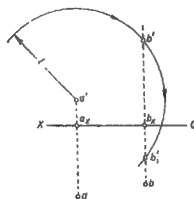
الشكل ٥



الشكل ٦



الشكل ٧



الشكل ٨

الثاني أي : $B (-12, 20)$. ننشئ كالسابق مخطط النقطة (a, a') ونعين على عمود عام ونحو الأعلى قطعة a_1b_1 بطول $y = 12 \text{ mm}$ وقطعة a_1b_1' بطول $z = 20 \text{ mm}$.
 ٣ - النقطة التي تناظرها بالنسبة لخط الأرض موجودة في الربع الثالث أي $B (-12, -20)$. ننشئ كالسابق مخطط النقطة (a, a') ونعين على عمود عام ونحو الأعلى قطعة a_1b_1 بطول $y = 12 \text{ mm}$ ونحو الأسفل قطعة a_1b_1' بطول $z = 20 \text{ mm}$.

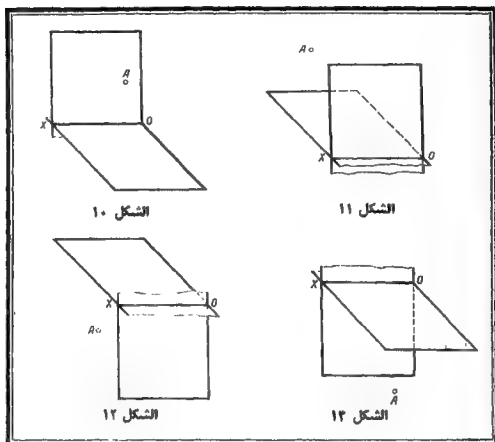
● المثال ٥ : لدينا نقطة A والمسقط الأفقي لنقطة B . في أي ربع توجد النقطة B إذا كان البعد بين مسطحيها الشاقولين مساوياً 25 mm (الشكل ٩) .

الحل : قبل كل شيء يجب أن نوجد المسقط الشاقولي (b') للنقطة B . بما أن البعد بين المسطحين الشاقولين للتقطعين يجب أن يساوي 25 mm لذا فالبقعة b' يجب أن تقع على محيط دائرة نصف قطرها 25 mm ومرسومة من النقطة a' . بالإضافة إلى ذلك فالبقعة b' يجب أن تقع على عمود نازل على خط الأرض من النقطة b . بهذا الشكل فالبقعة b' ستكون نقطة تقاطع العمود مع الدائرة . هناك نقطتان تحققان الطلب b' و b_1' فالبقعة B يمكن أن تقع في الربع الأول أو الرابع . في حالة خاصة يمكن أن نحصل على حل وحيد (متى ؟) . أو يمكن أن لا نحصل على أي حل (متى ؟) .

مسائل

١ - ارسم مسطحي نقطة A موجودة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ثم ارسم مخططاتها (الشكل ١٠ - ١٣) .

٢ - ارسم مسطوي نقطة A وفقاً للشرط $z=0$ (الشكل ١٠، ١٢) . ووفقاً للشرط $y=0$ (الشكل ١١، ١٣) ثم ارسم غططانها .



٣ - ارسم غطط نقطة A حسب الإحداثيات المعطاة .

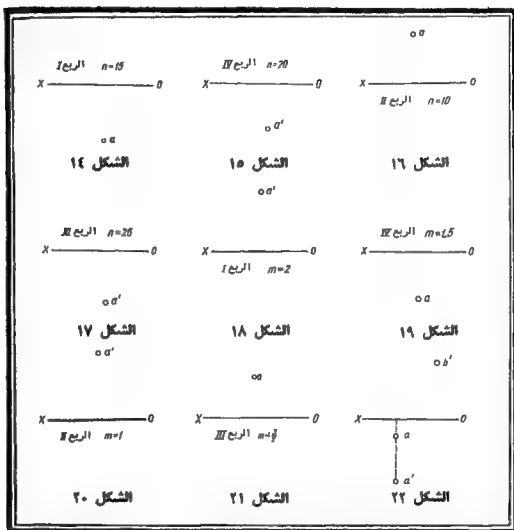
y	15	25	25	-25	-20	-30	35	0	-30	0
z	25	-40	-25	-15	35	30	0	-30	0	30

٤ - ارسم غطط نقطة A موجودة في الربع المين إذا أعطي أحد مسقطيها

والعلاقة بين الإحداثيات $(y = z + n)$ (الشكل ١٤-١٧) .

٥ - ارسم غطط نقطة A موجودة في الربع المين إذا أعطي أحد مسقطيها ونسبة

البعد من هذه النقطة حتى مستوي الإسقاط ($\frac{z}{y} = m$) (الشكل ١٨ - ٢١).



٦- ارسم مخطط نقطة B المناظرة للنقطة A (- 25 , 30) بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي ، لمستوي الإسقاط الشاقولي ، لحط الأرض .

٧- لدينا نقطة A والنقط الشاقولي للنقطة B . في أي ربع توجد النقطة B إذا كان البعد بين مقطعي الأفقين 25 mm (الشكل ٢٢) ؟

البحث الثالث

المستقيم

على الخطط

المسقط الشاقولي للمستقيم يوازي خط الأرض ،
أما المسقط الأفقي فيشكل مع خط الأرض
زاوية ما .

المسقط الأفقي للمستقيم يوازي خط الأرض ،
أما المسقط الشاقولي فيشكل مع خط الأرض
زاوية ما .

مسقطا المستقيم موازيان لخط الأرض .

مسقطا المستقيم يقعان على عمود واحد على
خط الأرض .

المسقط الأفقي للمستقيم عبارة عن نقطة .
أما المسقط الشاقولي فيستقيم عمودي على خط
الأرض .

المسقط الشاقولي للمستقيم عبارة عن نقطة .
أما المسقط الأفقي فيستقيم عمودي على خط
الأرض .

في الفراغ

١ - المستقيم موازي لمستوي الإسقاط
الأفقي .

٢ - المستقيم موازي لمستوي
الإسقاط الشاقولي .

٣ - المستقيم موازي لخط الأرض .

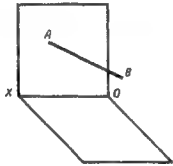
٤ - المستقيم واقع في مستوي عمودي
على خط الأرض (جنبي) .

٥ - المستقيم عمودي على مستوي الإسقاط
الأفقي (شاقولي) .

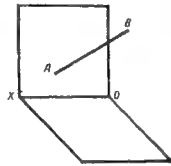
٦ - المستقيم عمودي على مستوي الإسقاط
الشاقولي (أمامي) .

مسائل

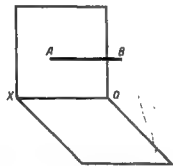
- ٨ - ارمم مسطحي مستقيم AB وارمم غخطه إذا كان :
- ١ - موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٢٣) .
 - ٢ - موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٢٤) .
 - ٣ - موازياً لخط الأرض (الشكل ٢٥) .
 - ٤ - عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٢٦) .
 - ٥ - عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٢٧) .



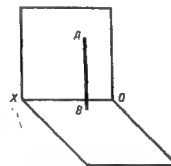
الشكل ٢٣



الشكل ٢٤



الشكل ٢٥



الشكل ٢٦

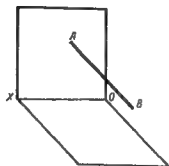
– اقرأ مخططات القطعة AB (أعلى الفراغات) :

- ١ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) ونهايتها A ترتكز على الحقل (١) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٢٨) .
- ٢ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) ونهايتها A ترتكز على (١) (الشكل ٢٩) .
- ٣ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) وتوازي مستوي الإسقاط (٤) وإن نهايتها A ترتكز على مستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٠) .
- ٤ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) عمودية على مستوي الإسقاط (٤) ترتكز نهايتها B على الحقل (١) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣١) .
- ٥ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) ، ترتكز نهايتها A على الحقل (١) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٢) .
- ٦ – القطعة AB تقع في الحقل (١) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٣) .
- ٧ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) موازية لمستوي الإسقاط (٤) وطرفها A يرتكز على الحقل (٤) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٤) .
- ٨ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) عمودية على مستوي الإسقاط (٤) وترتكز في نهايتها A على الحقل (٤) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٥) .
- ٩ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) موازية (٤) (الشكل ٣٦) .
- ١٠ – القطعة AB تقع في الحقل (٤) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٧) .
- ١١ – القطعة AB موجودة في الربع (٤) وترتكز في نهايتها A على الحقل (٤) لمستوي الإسقاط (٤) وفي نهايتها B على الحقل (٤) لمستوي الإسقاط (٤) (الشكل ٣٨) .

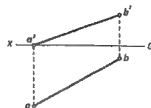
- ١٢ - القطعة AB تقع في الحقل (٢) لمستوي الإسقاط (٢) وتوازي (٢)
(الشكل ٣٩) .
- ١٣ - القطعة AB تقع في الحقل (٢) لمستوي الإسقاط (٢) موازية (٢)
(الشكل ٤٠) .

١٠ - ارسم مخطط القطعة AB إذا كانت :

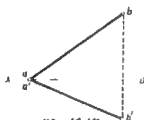
- ١ - في الوضعية العامة وموجودة في الربع الثاني وترتكز في نهايتها A على مستوي الإسقاط الشاقولي .
- ٢ - موجودة في الربع الأول وتوازي مستوي الإسقاط الشاقولي وترتكز في نهايتها A على مستوي الإسقاط الأفقي .
- ٣ - واقعة بصورة إعتباطية في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي .
- ٤ - موجودة في الربع الرابع عمودية على مستوي الإسقاط الأفقي ونهايتها A على بعد واحد عن مستوي الإسقاط .
- ٥ - موجودة في الربع الثالث وتوازي مستوي الإسقاط الأفقي ونهايتها A ترتكز على مستوي الإسقاط الشاقولي .
- ٦ - موجودة في المستوي المنصف للربع الأول وتوازي خط الأرض .
- ٧ - موجودة في الربع الرابع وتوازي مستوي الإسقاط الشاقولي ، ونهايتها A على بعد واحد عن مستوي الإسقاط .
- ٨ - في الوضعية العامة وموجودة في الربع الثالث وترتكز في نهايتها A على مستوي الإسقاط الأفقي ، ونهايتها B على بعد واحد من مستوي الإسقاط .
- ٩ - تقع في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي وتوازي خط الأرض .
- ١٠ - موجودة في الربع الثاني وترتكز في نهايتها A على خط الأرض .



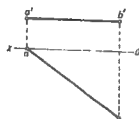
الشكل ٢٧



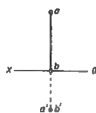
الشكل ٢٨



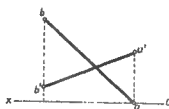
الشكل ٢٩



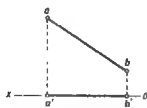
الشكل ٣٠



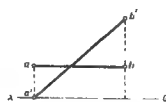
الشكل ٣١



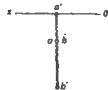
الشكل ٣٢



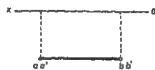
الشكل ٣٣



الشكل ٣٤



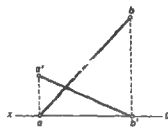
الشكل ٢٥



الشكل ٢٦



الشكل ٢٧



الشكل ٢٨



الشكل ٢٩



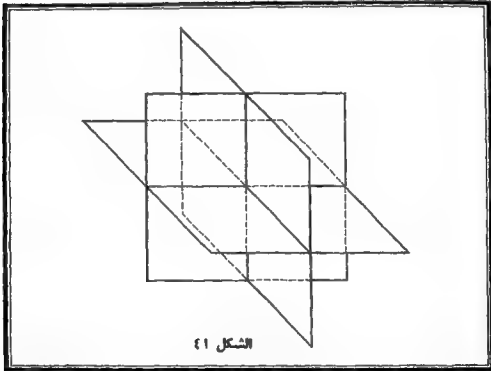
الشكل ٣٠

ونهايتها B على بعد واحد عن مستوي الإسقاط .
 ١١ - موجودة في الرابع الثالث عمودية على مستوي الإسقاط الشاقولي وترتكز
 في نهايتها B على مستوي الإسقاط .

البحث الرابع

الإسقاط على مستويات الإسقاط الثلاث

أرسم ثلاث مستويات مستعملة في الإسقاط القائم كمستويات إسقاط ، سجل
 عليها التسميات والرموز وخطوط الأرض والحقول والأرباع الفراغية (الشكل ٤١) .



V (أو V_3, V_2, V_1) W (أو W_3, W_2, W_1) ؛ $\pm OX, \pm OY, \pm OZ$ ؟

١٠ - ماهي ميزة جميع نقاط مستوي الإسقاط الأفقي ، الشاقولي ، الجنبى ؟

١١ - أين يمكن أن توجد نقطة في الفراغ إذا كان مسقطها الأفقي يقع على

H (أو H_3, H_2, H_1) أما مسقطها الشاقولي فيقع على V (أو V_3, V_2, V_1)

أما مسقطها الجنبى فيقع على W (أو W_3, W_2, W_1) ؟

١٢ - أي المحول ستصبح بعد إنطباقها فوق المحور ox ، تحت المحور ox ،

على يمين المحور oz ، على يسار المحور oz ؟

١٣ - ارسم في وضعية الإنطباق حقول مستويات الإسقاط المحدثة للربع الأول ،

التاني . . . الثامن ؟

١٤ - أي نقطة في الفراغ سيكون مسقطها الأفقي على الخطوط فوق المحور

ox ، تحت المحور ox ، على يسار oz ، على يمين oz ؟

١٥ - أي نقطة في الفراغ سيكون مسقطها الشاقولي على الخطوط فوق المحور

ox ، تحت المحور ox ، على يسار oz ، على يمين oz ؟

١٦ - أي نقطة في الفراغ سيكون مسقطها الجنبى على الخطوط فوق المحور ox

تحت المحور ox ، على يسار oz ، على يمين oz ؟

١٧ - أي نقطة غير واقعة على خط الأرض يمكن إنطباق مسقطها الأفقي

والشاقولي ، الشاقولي والجنبى ، المساقط الثلاث ؟

قبل أن تجيب على الأسئلة التالية (١٨ - ٢٨) ارسم مساقط النقطة A

الثلاثة في الربع الأول بصورة فراغية بالإضافة إلى المخطط (الشكل ٤٢) .

١٨ - أي الإحداثيات تعين المسقط الأفقي للنقطة ، الشاقولي ، الجنبى ؟

١٩ - ماهي مساقط النقطة التي تتوضع بعد تطبيق مستويات الإسقاط على عمود واحد

على ox ، oz ؟

٢٠ - ماهي طريقة إيجاد المسقط الثالث لنقطة إذا علم مقطان ؟ كيف يمكن

مثلاً إيجاد المسقط الجنبى لنقطة إذا علم المسقط الأفقى والشاقولي ؟

٢١ - ماذا يقاس على المخطط بعد نقطة في الفراغ عن مستوي الإسقاط الجنبى ؟

٢٢ - ماذا يعني لإنعدام إحداثيتين لنقطة (مثلاً $x = 0$ ، $z = 0$) ؟

٢٣ - ماذا يعني لإنعدام إحدى الإحداثيات لنقطة (مثلاً $y = 0$) ؟

٢٤ - في أي الأرباع تكون الإحداثية x للنقطة موجبة ، سالبة ؟

٢٥ - في أي الأرباع تكون الإحداثية y للنقطة موجبة ، سالبة ؟

٢٦ - في أي الأرباع تكون الإحداثية z للنقطة موجبة ، سالبة ؟

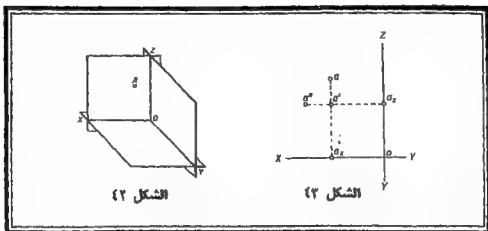
٢٧ - ماهي إشارات الإحداثيات x ، y ، z لنقطة موجودة في الربع الأول ...

الثامن ؟

٢٨ - كيف نأخذ على المخطط قطعة تعين الإحداثية x إذا كانت موجبة ،

سالبة ، قطعة تعين الإحداثية y ، عند تعين المسقط الجنبى للنقطة ،

إذا كانت هذه الإحداثية موجبة ، سالبة ؟



أمثلة

• المثال ٦ : ارسم غطط النقطة A (١٥ ، - ٢٤ ، ١٥) (الشكل ٤٣) .

الحل : نأخذ على المحور الموجب ox قطعة oa_x بطول ١٥ mm (x) ونحور من النقطة a_x عموداً على المحور ثم نأخذ عليه ونحور الأعلى قطعة $a_x a''$ بطول ٢٤ mm (y) وقطعة $a'' a_z$ بطول ١٥ mm (z) . لتعيين المقطع الجانبي (a'') لننقله نحور من النقطة a'' عموداً على المحور oz ونأخذ عليه من الجهة اليسرى قطعة $a'' a'''$ بطول ٢٤ mm (y) .

• المثال ٧ : لدينا نقطة A (- ١٥ ، - ٢٤ ، ١٥) . ارسم غطط النقطة B نظيرة النقطة A بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٤٤) ، الشاقولي (الشكل ٤٥) ، الجانبي (الشكل ٤٦) .

الحل : النقطة A موجودة على بين مستوي الإسقاط الجانبي وخلف مستوي الإسقاط الشاقولي وتمت مستوي الإسقاط الأفقي أي في الربع السابع . لترسم غططها .

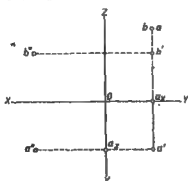
لنأخذ على المحور السالب ox قطعة oa_x بطول 15 mm (x) ثم نغور من النقطة a_x عموداً على المحور ox ونأخذ عليه القطعة $a_x a$ نحو الأعلى ويطول 24 mm (y) ونحو الأسفل قطعة $a_x a'$ بطول 15 mm (z) ثم نرمم من النقطة a' مستقيماً عمودياً على المحور oz ونأخذ عليه من الجهة اليسرى قطعة $a' a''$ بطول 24 mm (y) .

١ - النقطة B مناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي وموجودة في الربع السادس ($15, -24, -15$) . نأخذ على عمود عام ونحو الأعلى قطعة $a_z b$ بطول 24 mm (y) وقطعة $a_z b'$ بطول 15 mm (z) ثم نوجد المسقط الجنبى (b'') للنقطة B .

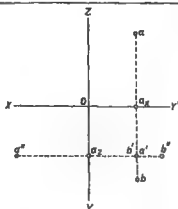
٢ - النقطة B مناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي ، وموجودة في الربع الثامن ($-15, +24, -15$) . نرمم كما ذكرنا سابقاً مخطط النقطة A ، نأخذ على عمود عام ونحو الأسفل قطعة $a_z b$ بطول 24 mm (y) ، وقطعة $a_z b'$ بطول 15 mm (z) . ثم نغور من b' عموداً على المحور oz ونأخذ عليه من جهة اليمين قطعة $a_z b''$ بطول 24 mm (y) .

٣ - النقطة B مناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة لمستوي الإسقاط الجنبى وموجودة في الربع الثالث ($15, -24, -15$) . نرمم كالسابق مخطط النقطة A ونأخذ على المحور الموجب ox قطعة ob_x بطول 15 mm (x) ثم نغور من النقطة b_x عموداً على المحور ox ونأخذ عليه قطعة $b_x b$ نحو الأعلى ويطول 24 mm (y) ونحو الأسفل $b_x b'$ بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد (b'') للنقطة B .

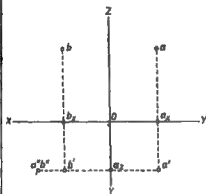
● المثال ٨ : لدينا نقطة A ($15, 24, -15$) . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة A بالنسبة للمحاور ox (الشكل ٤٧) ، oy (الشكل ٤٨) ، oz (الشكل ٤٩) .



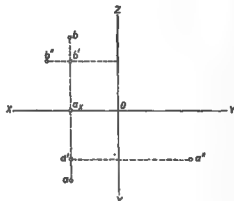
الشكل ٤



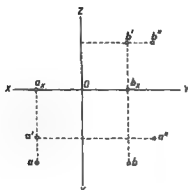
الشكل ٥



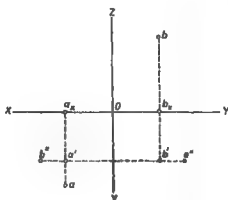
الشكل ٦



الشكل ٧



الشكل ٨



الشكل ٩

الحل : النقطة A موجودة على يسار المستوي الجني وأمام مستوي الإسقاط الشاقولي وتحت مستوي الإسقاط الأفقي أي في الربع الرابع . لنرسم مخططها . نأخذ على المحور الموجب ox قطعة oa_x بطول 15 mm (x) ، ثم نمر من النقطة a_x عموداً على ox ونأخذ عليه من الجهة السفلى قطعة a_xa بطول 24 mm (y) وقطعة a_xa' بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد المسقط الجني (a'') للنقطة A .

١ - النقطة B المناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة للمحور ox موجودة في الربع الفراغي الثاني أي $B(15, -24, 15)$. نأخذ على عمود عام من الجهة العليا قطعة b_xb بطول 24 mm (y) وقطعة a_xb' بطول 15 mm (z) ثم نوجد المسقط الجني (b'') للنقطة B .

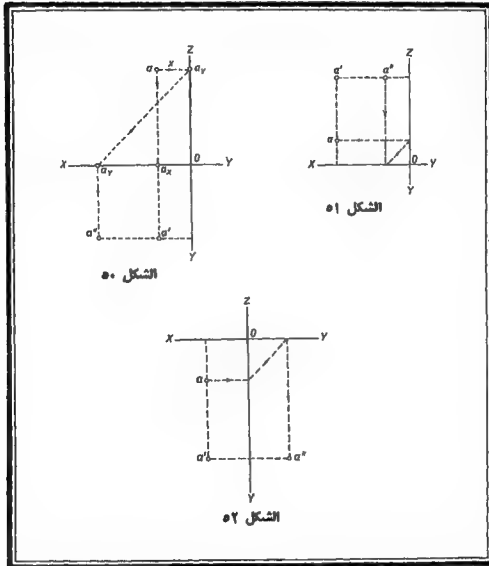
٢ - النقطة B المناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة للمحور oy موجودة في الربع الفراغي الخامس أي $B(-15, 24, -15)$. لنرسم كما مر سابقاً مخطط النقطة A ونأخذ على المحور السالب ox قطعة ob_x بطول 15 mm (x) ثم نمر من النقطة b_x عموداً على ox ونأخذ عليه قطعة b_xb من الجهة السفلى وبطول 24 mm (y) وقطعة b_xb' من الجهة العليا بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد المسقط الجني (b'') للنقطة B .

٣ - النقطة B المناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة للمحور oz موجودة في الربع الفراغي السابع أي $B(-15, -24, -15)$. نرسم مخطط النقطة A ونأخذ على المحور السالب ox قطعة ob_x بطول 15 mm (x) ثم نمر من النقطة b_x عموداً على ox ونأخذ عليه قطعة b_xb من الجهة العليا وبطول 24 mm (y) ، ومن الجهة السفلى b_xb' بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد (b'') للنقطة B .

● **المثال ٩ :** لدينا المسقط الأفقي (a) للنقطة A الموجودة في الربع الثالث . أوجد المسطتين الآخرين مع العلم أن $z = x + 12\text{ mm}$ (الشكل ٥٠) .

الحل : المسقط الشاقولي (a') يجب أن يقع تحت المحور ox وعلى عمود مقام عليه ومار

من المقط الأفقي للنقطة . إن الإحداثية x تعين البعد من المقط الأفقي (a) حتى المحور oz . وإن الإحداثية z تعين البعد من المقط الشاقولي (a') حتى المحور ox .
لذلك يمر من النقطة a مستقيماً عمودياً على المحور ox حتى يتقاطع معه في النقطة a_x .



اعتباراً من النقطة a_x نأخذ على هذا العمود ومن الجهة السفلى قطعة $a_x a'_x$ مساوية

، فنهاية القطعة تعطينا المسقط الشاقولي (a') للنقطة . بعد ذلك نوجد المسقط الثالث (a'') .

● المثال ١٠ : ارمم المحور oz والمسقط الأتقي للنقطة A الموجودة في الربع الثاني إذا

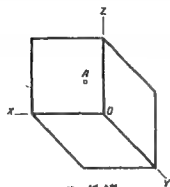
$$\text{علت المسطين } a'' \text{ و } a \text{ والنبة } = 3 \quad \frac{x}{y} = 3 \quad (\text{الشكل ٥١}) .$$

الحل : إن المساط المعطاة للنقطة A يجب أن تقع على يسار المحور oz . بما أن بعد المسقط الشاقولي (a') عن oz هو x ، وأن بعد المسقط الجنبى (a'') عن oz هو y لذا فالقطعة الراقعة بين المسطين a'' ، a' ستساوي إلى الفرق ($x - y$) ، وباستعمال النبة المعطاة $= 3 \quad \frac{x}{y}$ نشكل التناسب $\frac{x - y}{y} = \frac{3 - 1}{1} = 2$ ومنه $\frac{x - y}{2} = y$.

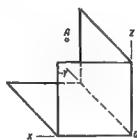
والآن يبقى أن نقسم القطعة $a'' a'$ إلى قطعتين متساويتين ونرسم محورا oz عمودياً على المحور ox وعلى بعد $\frac{a'' a'}{2}$ من الجهة اليمنى للمسقط الجنبى (a'') ، ثم نوجد المسقط الأتقي (a) للنقطة A .

● المثال ١١ : أنشئ المحور ox والمسقط الجنبى للنقطة A الموجودة في الربع الرابع إذا علتمسطين a ، a' والنبة $= \frac{1}{3} \quad \frac{y}{z} = \frac{1}{3}$ (الشكل ٥٢) .

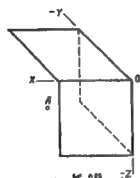
الحل : إن المساط المعطاة للنقطة A يجب أن تقع تحت المحور ox . بما أن البعد من المسقط الأتقي للنقطة حتى المحور ox هو y وبما أن المسافة من المسقط الشاقولي للنقطة حتى المحور ox هو z لذلك فالقطعة الراقعة بين مسطحي النقطة أي a' ستساوي إلى الفرق ($z - y$) ، فباستعمال الشرط المعطى $\frac{y}{z} = \frac{1}{3}$



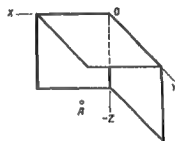
الشكل ٥٢



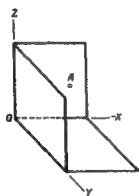
الشكل ٥٤



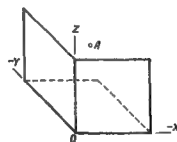
الشكل ٥٥



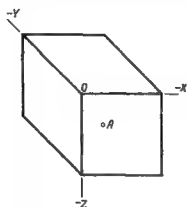
الشكل ٥٦



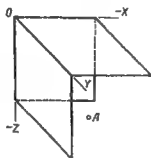
الشكل ٥٧



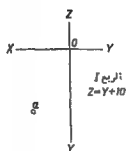
الشكل ٥٨



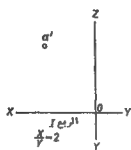
الشكل ٥٩



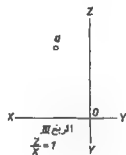
الشكل ٦٠



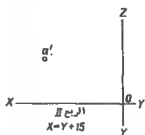
الشكل ٦١



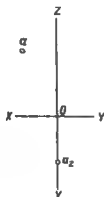
الشكل ٦٢



الشكل ٦٣



الشكل ٦٤



الشكل ٦٥



الشكل ٦٦

نشكل تناسباً يدخل فيه الفرق $z - y$ وتبعاً لذلك نكتب الشرط

$$\cdot \frac{z-y}{2} = y \text{ أو } \frac{z-y}{y} = \frac{3-1}{1} = 2 \text{ ومنه } \frac{z}{y} = \frac{3}{1} \text{ بالشكل } \frac{y}{z} = \frac{1}{3} .$$

والآن يبقى أن نقسم القطعة aa' إلى قسمين متساويين ثم نرمم المحور ox

فوق النقطة a على بعد $\frac{aa'}{2}$. وبعد ذلك نوجد المسقط الجانبي (a') للنقطة A .

مسائل

١١ - ارسم مساقط النقطة A الموجودة في الربع الأول ، الثاني ... الخ ثم ارسم مخططاتها (الشكل ٥٣ - ٦٠) .

١٢ - ارسم مساقط النقطة A من الشرط $z_A = 0$ (الشكل ٥٣ ، ٥٥ ،

٥٩ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨) ومن الشرط $y_A = 0$ (الشكل ٥٤ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٩)

ومن الشرط $x_A = 0$ (الشكل ٥٤ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٩) ثم ارسم مخططاتها .

١٣ - ارسم مخططات النقطة A حسب الإحداثيات المعطاة .

x	20	15	15	20	- 15	- 20	- 20	- 15	25	- 25
y	15	- 25	- 25	20	25	- 15	- 15	25	- 25	25
z	25	35	- 20	- 30	20	25	- 25	- 35	25	- 25
x	15	- 15	20	- 15	0	0	0	0	0	- 20
y	- 25	25	0	0	- 20	25	- 20	- 20	0	0
z	0	0	- 30	30	30	- 35	20	0	20	0

١٤ - أوجد المساقط الناقصة للنقطة A إذا كان معلوماً أحد المساقط ، والنسبة بين إحداثيات النقطة ، والربع الفراغي حيث توجد النقطة (الشكل ٦٦ - ٦١) .

١٥ - ارسم محور الإسقاط الناقص وعين مسقط النقطة A إذا أعطيت النسبة بين إحداثياتها (الشكل ٦٧ - ٧٢)

١٦ - ارسم المسقط الثالث للمستقيم AB من المثلث ABC (الشكل ٧٣ - ٧٨) .

١٧ - أنشئ مساقط المثلث ABC إذا أعطيت إحداثيات رؤوسه :

$$A (20 , 0 , 0) , B (0 , 30 , 0) , C (0 , 0 , 25)$$

١٨ - أنشئ مساقط المثلث ABC إذا أعطيت إحداثيات رؤوسه :

$$A (20 , 30 , 0) , B (20 , 0 , 30) , C (0 , 20 , 30)$$

١٩ - لدينا النقطة A (20 , 30 , 20) . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة

A بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي ، الشاقولي ، الجنبى (ارسم

ثلاث مخططات) .

٢٠ - لدينا النقطة A (20 , 30 , 20) . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة

A بالنسبة للمعاور ox ، oy ، oz (ارسم ثلاث مخططات) .

٢١ - ارسم مساقط المكعب ذي القاعدة ABCD الواقعة في مستوي الإسقاط

الشاقولي إذا علم لدينا القطر AC للقاعدة ثم بين مساقط كل وجه وكل

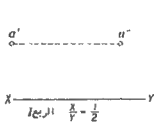
ضلع (الشكل ٧٩) .

٢٢ - ارسم مساقط موثور قائم مثلثي منتظم ، لإرتفاعه 50 mm

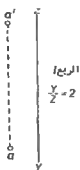
إذا علمت الضلع AB من قاعدته الواقعة في مستوي الإسقاط الأفقي .

بين مساقط كل وجه وكل ضلع (الشكل ٨٠) .

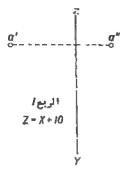
٢٣ - ارسم مساقط هرم قائم مثلثي منتظم ، لإرتفاعه 60 mm



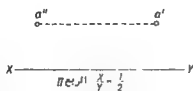
الشكل ٦٧



الشكل ٦٨



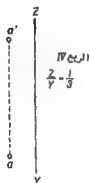
الشكل ٦٩



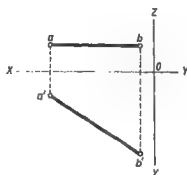
الشكل ٧٠



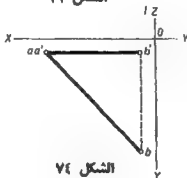
الشكل ٧٢



الشكل ٧٣



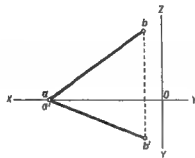
الشكل ٧٤



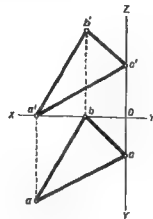
الشكل ٧٥



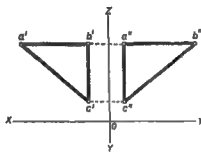
الشكل ٧٦



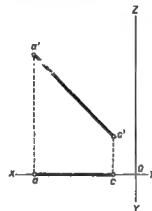
الشكل ٧٦



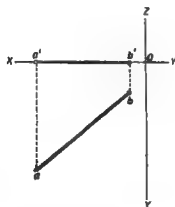
الشكل ٧٧



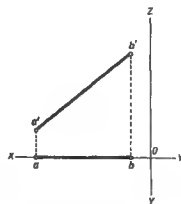
الشكل ٧٨



الشكل ٧٩



الشكل ٨٠



الشكل ٨١

إذا علت الضلع AB من قاعدته الواقعة في مستوى الإسقاط الشاقولي .

بين مساقط كل وجه وكل ضلع (الشكل ٨١) .

٢٤ - أرسم مساقط لإسطوانة قائمة ذات قاعدة واقعة في مستوى الإسقاط

الشاقولي ومركزها (30 , 0 , 30) C إذا أعطي إرتفاعها 60 mm

ونصف قطر قاعدتها بإوي 20 mm .

٢٥ - أرسم المحل الهندسي للمستقيمت المارة من النقطة (30 , 30 , 50) S

والمشكلة مع مستوى الإسقاط الأفقي زاوية 70° .

٢٦ - أرسم المحل الهندسي للتقاط التي تبعد عن النقطة (30 , 30 , 35) C بمقدار

20 mm .

البحث الخامس

الوضعية المشتركة للمستقيم والنقطة

على الخط

في الفراغ

النقطة تقع على المستقيم مناطق النقطة تقع على مساقط المستقيم الموازية

ملاحظة : في حالة المستقيم الجنبى ، النظرية العكسية ستكون صحيحة فقط

في الجملة H , V , W . وفي حالة وجود مسقطين يجب التأكد من وقوع

المسقط الجنبى للنقطة على المسقط الجنبى للمستقيم .

على الخط

في الفراغ

مسقطا المستقيم يبران من مسطوي النقطة

المستقيم يمر من نقطة

المواقين

مستقيمة

● المثال ١٢ : هل تقع التقاط A , B , C , D على المستقيم MN (الشكل ٨٢) .

الحل : المقتان (a, a') للنقطة A يقعان على المستقيمين الموازيين للمستقيم $(mn, m'n')$ ، بناء عليه فالنقطة A تقع على المستقيم MN . المقتان (b, b') للنقطة B يقعان على المستقيمين غير الموازيين للمستقيم $(mn, m'n')$ بناء عليه فالنقطة B لا تقع على المستقيم MN وكذلك لا تقع على المستقيم MN . (لماذا ؟) .

● **المثال ١٣ :** هل تقع النقطة G على المستقيم الجنبى AB (الشكل ٨٣) .

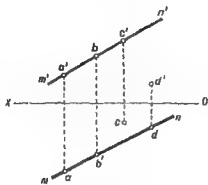
الحل : بما أن المستقيم المعلق جنبى لذا يجب أن تتحقق من الوضعية المشتركة للمقط الجنبى للمستقيم والمقط الجنبى للنقطة G . لرسم المقط الجنبى للمستقيم والمقط الجنبى للنقطة G نرى أن المقط الجنبى للنقطة لا يقع على المقط الجنبى للمستقيم بناء عليه فالنقطة G لا تقع على المستقيم AB .

● **المثال ١٤ :** لدينا مستقيم جنبى AB والمقط الشاقولي (c') للنقطة C الواقعة على المستقيم ، أوجد المقط الأفقي (c) لهذه النقطة (الشكل ٨٤) .

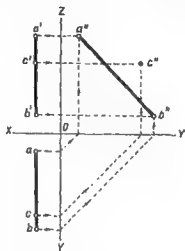
الحل : لكي يتسنى لإيجاد المقط الأفقي (c) للنقطة يلزمنا المقط الجنبى (c') الذي يجب أن يقع على المقط الجنبى $(a''b'')$ للمستقيم وعلى مستقيم عمودي على المحور oz ومرسوم من النقطة c' . نعين المقط الجنبى $(a''b'')$ للمستقيم ، وعند تقاطعه مع العمود على oz والمرسوم من c' نحصل على المقط الجنبى (c') للنقطة . بعد ذلك نوجد المقط الأفقي (c) للنقطة .

● **المثال ١٥ :** لدينا المستقيم الجنبى AB والمقط الأفقي (c) للنقطة C الواقعة على ذلك المستقيم . أوجد المقط الشاقولي (c') لهذه النقطة (الشكل ٨٥) .

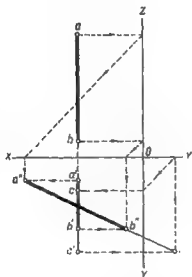
الحل : لكي نجد المقط الشاقولي (c') للنقطة يلزمنا مقطها الجنبى (c'') الذي



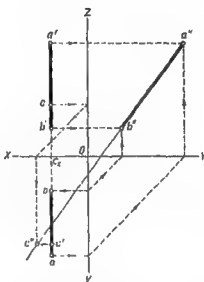
الشكل ٨٢



الشكل ٨٣



الشكل ٨٤



الشكل ٨٥

يجب أن يقع على المسقط الجنبى للمستقيم $(a''b'')$ ، وعلى بعد y من
الجهة اليسرى (لماذا ؟) من المحور oz . ومنه نوجد المسقط الجنبى للمستقيم $(a''b'')$
وعند تقاطعه مع المستقيم الموازى للمحور oz المرسوم من الجهة اليسرى وعلى
بعد c_2c (أي y) نحصل على المسقط الجنبى (c'') للنقطة c ، بعد ذلك نوجد المسقط
الشاقولي c' للنقطة c .

● المثال ١٦ : مرور من النقطة A و B مستقيماً (الشكل ٨٦) .

الحل : نرمس مسطحي المستقيم : الأفقي يمر من النقطة a و b والشاقولي يمر من
 a' و b' .

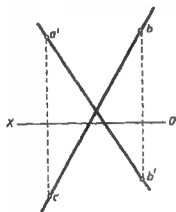
● المثال ١٧ : لدينا نقطة A ومساقط مختلفة للنقطتين B و C أوجد
المساقط الناقصة للنقطتين B و C إذا علمت أن التقاطع الثلاث تقع على المستقيم MN (الشكل ٨٧) .

الحل : نرمس مسطحي المستقيم MN : الأفقي (mn) - عبر النقطة a و c .
الشاقولي $(m'n')$ - عبر النقطة a' و b' . بعد ذلك نوجد المسقط الأفقي (b)
لنقطة B على المستقيم mn والمسقط الشاقولي (c') للنقطة C على المستقيم $m'n'$.

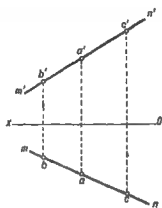
● المثال ١٨ : أوجد على المستقيم AB النقطة C إذا علمت النسبة $\frac{z}{y} = \frac{1}{2}$

(الشكل ٨٨) .

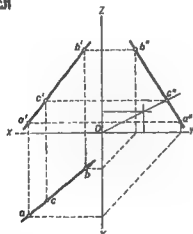
الحل : تعيين الإحداثيات y و z المسقط الجنبى (c'') للنقطة C ، المحل الهندسي لنقاط
المستوي في المجموعة zoy ذات النسبة $\frac{z}{y} = \frac{1}{2}$ هو خط مستقيم معادلته
 $y = 2z$. المسقط الجنبى (c'') للنقطة C يجب أن يقع على المسقط الجنبى $(a''b'')$



الشكل ٨٦



الشكل ٨٧



الشكل ٨٨

المستقيم المعطى AB وعلى المستقيم $y = 2z$ أي عند تقاطعها ، بناء عليه فمن

المقاطع المعطاة للمستقيم AB توجد مسقطه الجنبى ($a''b''$) ، نرسم فى المجموعة zoy المستقيم $y = 2z$ وعند تقاطعها نحصل على المسقط الجنبى (c'') للنقطة C . بعد ذلك من c'' نوجد المسقط الأفقى والشافولى للنقطة على المقاطع الموافقة للمستقيم AB .

مسائل

٢٧ - أوجد على المستقيم AB نقطة ، إذا علم بعدها عن أحد مستويات الإسقاط (الشكل ٨٩ ، ٩١) .

٢٨ - أوجد على المستقيم AB نقطة C علم أحد مساقطها (الشكل ٩٢ ، ٩٣) .

٢٩ - ماهى الميزة المشتركة لجميع النقاط . (على المخطط) الواقعة على مستقيم : أمامى ، شافولى ، أو مستقيم عمودى على المستوي الجنبى ؟

٣٠ - هل يمكننا دائماً عند معرفة مسقط واحد لنقطة واقعة على مستقيم

إيجاد المسقط الآخر فى المجموعة V و H ، W ، V ، H ؟

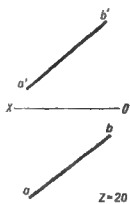
٣١ - أوجد على المستقيم AB نقطة C نسبة إحداثياتها $\frac{z}{y} = m$

(الشكل ٩٤ ، ٩٥) .

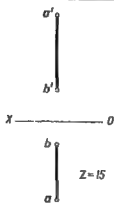
٣٢ - مرر من النقطة C مستقيماً AB يوازي مستوي الإسقاط الأفقى (الشكل

٩٦) ، يوازي مستوي الإسقاط الشافولى (الشكل ٩٧) ، يوازي

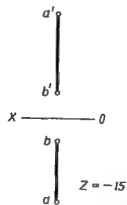
مستوي الإسقاط الجنبى (الشكل ٩٨) .



الشكل ٨٩



الشكل ٩٠



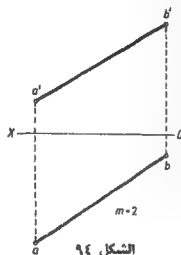
الشكل ٩١



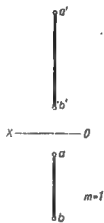
الشكل ٩٢



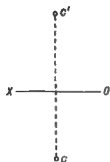
الشكل ٩٣



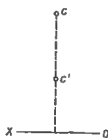
الشكل ٩٤



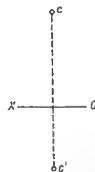
الشكل ٩٥



الشكل ٩٦



الشكل ٩٧



الشكل ٩٨

البحث السادس

آثار المستقيم

آثار المستقيم هي نقاط تقاطع المستقيم مع مستويات الإسقاط . الأثر الأفقي للمستقيم هو نقطة تقاطعه مع مستوي الإسقاط الأفقي . الأثر الشاقولي للمستقيم هو نقطة تقاطعه مع مستوي الإسقاط الشاقولي ، نرمز للأثر الشاقولي للمستقيم بالحرف V أما لمقطبه (v, v') ، نرمز للأثر الأفقي بالحرف H أما لمقطبه (h, h') .

قاعدة : لإيجاد الأثر الأفقي لمستقيم نقوم بما يلي : ممدد المسقط الشاقولي للمستقيم حتى يقطع خط الأرض في النقطة h' ، ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض حتى يتقاطع مع المسقط الأفقي للمستقيم في النقطة h . هذه النقطة هي الأثر الأفقي للمستقيم . لإيجاد الأثر الشاقولي لمستقيم نقوم بما يلي : ممدد المسقط الأفقي للمستقيم فيقطع خط الأرض في النقطة v ، ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض فيتقاطع مع المسقط الشاقولي للمستقيم في النقطة v' . هذه النقطة هي الأثر الشاقولي للمستقيم .

ملاحظة : يمكننا وفق القاعدة السابقة والمستقيم الجنبى إيجاد النقطتين v و h' فقط . ولإيجاد v' و h يجب تعيين v'' و h'' أولاً وذلك عند تقاطع $a''b''$ مع المحورين oy ، oz . بعد ذلك نوجد h بمساعدة h'' و h' ، ونوجد v' بمساعدة v و v'' .

امثلة

● المثال ١٩ : ارسم مساقط مستقيم إذا أعطيت آثاره (الشكل ٩٩) .

الحل : المستقيم المطلوب يمر من الآثار - H, V بناء عليه فمساقط المستقيم يجب أن تمر من المساقط المماثلة لهذه النقاط . لنوجد المساقط (h, h') ، (v, v') لهذه النقاط ثم نرمس المسقط الأفقي للمستقيم عبر h و v والمسقط الشاقولي للمستقيم عبر h' و v' .

● المثال ٢٠ : أوجد آثار المستقيم AB وبين جزأه المرئي وغير المرئي (الشكل ١٠٠) .

الحل : نمسك المسقط الأفقي (a, b) للمستقيم حتى يتقاطع مع المحور ox في نقطة v . ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض حتى يتقاطع مع المسقط الشاقولي للمستقيم في نقطة v' فنحصل على الأثر الشاقولي للمستقيم بعد ذلك نمسك المسقط الشاقولي (a', b') للمستقيم حتى يتقاطع مع خط الأرض في نقطة h' ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض حتى يتقاطع مع المسقط الأفقي للمستقيم في نقطة h فنحصل على الأثر الأفقي للمستقيم . بناء عليه فالمستقيم المطلوب له أثر أفقي في الحقل الأفقي الخلفي . وأثر شاقولي في الحقل الشاقولي العلوي ، هذا المستقيم يمر من الربع الأول والثاني والثالث ، القطعة الكائنة بين الأثرين غير مرئية أما بعد الأثر الشاقولي للمستقيم فمرئية ، أما بعد الأثر الأفقي فغير مرئية .

● المثال ٢١ : لدينا مستقيم جنبي AB أوجد آثاره (الشكل ١٠١) .

الحل : نمسك المساقط المعطاة حتى تقاطعها مع خط الأرض في النقاط h' و v . نرمس المسقط الجنبى للمستقيم ونعده فيتقاطع مع المحور oy في النقطة h'' ، وممع

المحور oz في النقطة v' وبعد ذلك نجد h بمساعدة h' و h'' . ونوجد v' بمساعدة v و v'' .

● المثال ٢٢ : ارسم مساقط مستقيم علت آثاره H و W . أوجد الأثر الشاقولي للمستقيم ثم بيّن الجزء المروي منه والجزء غير المروي (الشكل ١٠٢) .

الحل : من الآثار المعطاة H و W نوجد مساقطها . نرسم مسطوي المستقيم المطلوب عبر المساقط المائلة للمقاطع H و W . لكي نحصل على الأثر الشاقولي للمستقيم نوجد النقطة v تقاطع المسقط الأفقي للمستقيم مع المحور ox ثم نرفع من هذه النقطة عموداً على المحور حتى تقاطعه في النقطة v' مع المسقط الشاقولي للمستقيم ، وهكذا نحصل على الأثر الشاقولي للمستقيم . المستقيم غير مروي .

مسائل

٣٣ - عدد المستقيمت التي لها أثر واحد فقط في الجملة H, V ثم ذلك الأثر .

٣٤ - عدد المستقيمت التي لها في الجملة H, V, W :

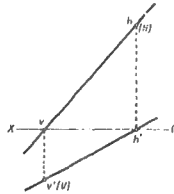
١ - أثر واحد فقط (سمّ ذلك الأثر) .

٢ - أتران (سمّ هذين الأثرين) .

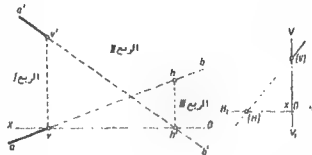
٣٥ - ماهي ميزة آثار المستقيم الجنبى على المخطط ؟

٣٦ - في أي الحالات يمكن إنطباق آثار مستقيم جنبى على المخطط .

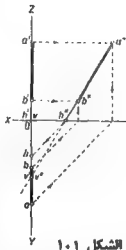
٣٧ - أعط مثلاً عندما لا يتعين المستقيم بأثره الأضفي والشاقولي . بيّن ماهي الشروط الإضافية اللازمة لتحين هذا المستقيم بصورة كاملة .



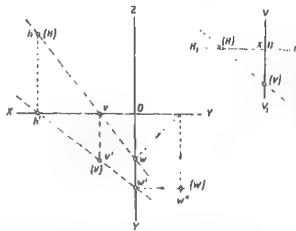
الشكل ٩٩



الشكل ١٠٠

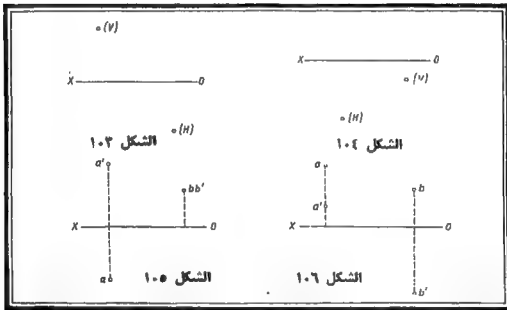


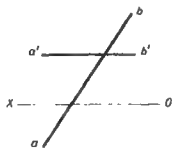
الشكل ١٠١



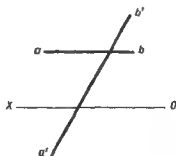
الشكل ١٠٢

- ٣٨ - عدد الحالات التي ينطبق فيها أثر مستقيم مع أحد ماقطه .
- ٣٩ - ارسم ماقط مستقيم معطى بآثاره (الشكل ١٠٣، ١٠٤) .
- ٤٠ - أوجد آثار مستقيم يمر من نقطتين A و B (الشكل ١٠٥، ١٠٦) .
- ٤١ - أوجد آثار المستقيم AB (الشكل ١٠٧ - ١١٣) .
- ٤٢ - إذا علت آثار المستقيم (أو أثر ومقط واحد لكل من الأثرين الآخرين) .
- ارسم ماقطه الثلاث (الشكل ١١٤ - ١١٧) .





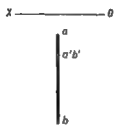
الشكل ١٠٧



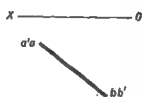
الشكل ١٠٨



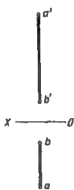
الشكل ١٠٩



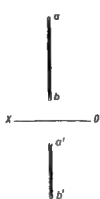
الشكل ١١٠



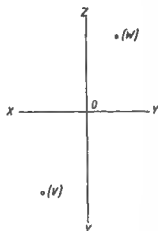
الشكل ١١١



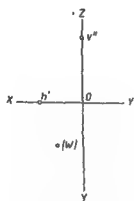
الشكل ١١٢



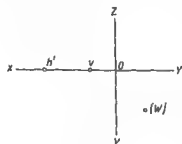
الشكل ١١٣



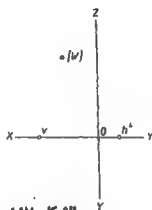
الشكل ١١٤



الشكل ١١٥



الشكل ١١٦



الشكل ١١٧

البحث السابع

الوضعية المشتركة للمستقيمتين في الفراغ

على المخطط

في الفراغ

- ١ - المستقيمتان متقاطعتان ، نقاط التقاطع تقع على عمود واحد على خط الأرض .
- ٢ - المستقيمتان متوازيتان .

حالة خاصة : المستقيمتان المتقاطعتان يمكن أن تكونا متعامدتين فيما بينهما . نظرية إسقاط مستقيمتين متعامدتين تدلوس في البحث العاشر . إذا كانت المستقيمتان غير متقاطعتان وغير متوازيتان فهي مستقيمتان متخالفتان .

ملاحظة : الوضعية المشتركة لمستقيمتين أحدهما مستقيم جنبي وتوضع بالمسقط الثالث .

فمثلا يكون المستقيمان الجنبيان متوازيين إذا كانا مسقطهما الجنبيان متوازيين فيما بينهما .

امثلة

● المثال ٢٣ : اشرح الوضعية المشتركة للمستقيمتين AB و CD في الفراغ (الشكل ١١٨) .

الحل : إن نقاط تقاطع الماسقطات المتماثلة للمستقيمتين المفروضتين تقع على عمود واحد على خط الأرض . نرمز لنقطة تقاطع الماسقطتين الأفقيتين للمستقيمتين بالحرف k ولنقطة تقاطع الماسقطتين الشاقوليتين بالحرف k' فالنقطة (k, k') تقع على المستقيمتين AB و CD أي أنها نقطة مشتركة بينهما ومنه المستقيمان AB و CD يتقاطعان في الفراغ .

● المثال ٢٤ : اشرح الوضعية المشتركة للمستقيمين AB و CD (الشكل ١١٩) .

الحل : إن نقاط تقاطع المماسات المائلة للمستقيمين تقع على عمود واحد على خط الأرض ، لنرمز لتقاطع المقطعين الأفقيين بالحرف k ولتقاطع المقطعين الشاقوليين بالحرف k' فالنقطة (k, k') تقع على المستقيم $(ab, a'b')$. لتوضيح وضعية النقطة (k, k') بالنسبة للمستقيم الجانبي CD نرسم المسقط الجانبي للمستقيم $(cd, c'd')$ والنقطة (k, k') . المسقط الجانبي (k'') للنقطة لا يقع على المسقط الجانبي $(c'd'')$ للمستقيم CD أي أن النقطة (k, k') لا تقع على المستقيم الجانبي $(cd, c'd')$ وبالتالي النقطة (k, k') ليست مشتركة بين المستقيمين AB, CD . ومنه المستقيمان AB و CD متخالفان في الفراغ .

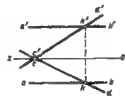
● المثال ٢٥ : اشرح انزعامة المشتركة للمستقيمين AB , CD (الشكل ١٢٠) .

الحل : إن المماسات الأفقية والشاقولية للمستقيمين AB, CD متوازية فيما بينها ، بناء عليه فالمستقيمان AB, CD متوازيان .

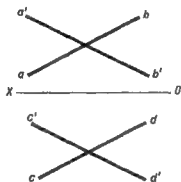
● المثال ٢٦ : اشرح الوضعية المشتركة للمستقيمين AB ، CD (الشكل ١٢١) .

الحل : إن المماسات الأفقية والشاقولية للمستقيمين الجانبيين المتخالفين ستكون دائماً متوازية فيما بينها. لذلك لتوضيح الوضعية المشتركة لهذه المستقيمين يجب أن نرسم مساقطها الجانبية $(a''b'')$ ، $(c''d'')$. إن المقطعين الجانبيين للمستقيمين $(ab, a'b')$ ، $(cd, c'd')$ متقاطعان فيما بينها وعليه فالمستقيمان AB , CD متخالفان .

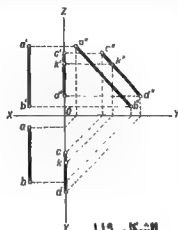
● المثال ٢٧ : لدينا مستقيم AB ونقطة C مرور من النقطة C مستقيماً ما يقطع AB (الشكل ١٢٢) .



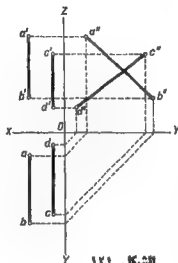
الشكل ١١٨



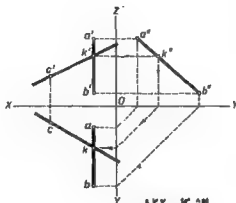
الشكل ١٢٠



الشكل ١١٩



الشكل ١٢١



الشكل ١٢٢

الحل : لئأخذ نقطة ما K على المستقيم AB بما أن المستقيم المعطى AB جنبي لذا نرمس منقطه الجنبي ونأخذ عليه المسقط الجنبي (k^*) للنقطة K .

نوجد من المسقط الجنبي (k^*) المسقط الأفقي والمقط الشاقولي (k, k') للنقطة على المساط الموافقة للمستقيم AB ثم نرمس مساط المستقيم المطلوب :

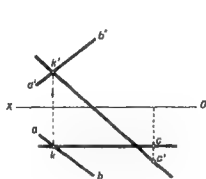
المسقط الأفقي للمستقيم عبر النقاط k, c المسقط الشاقولي للمستقيم عبر النقاط c', k' .

● **المثال ٢٨ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C مرور من النقطة C مستقيماً بقطع المستقيم AB ويرأزي مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ١٢٣) .

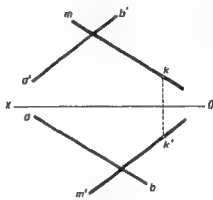
الحل : إن مساط المستقيم المطلوب يجب أن تمر من مساط النقطة C الموافقة وبما أن المستقيم يجب أن يرأزي مستوي الإسقاط الشاقولي لذا فمقطه الأفقي سوف يرأزي خط الأرض ومنه يمر من النقطة c المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب بشكل يرأزي خط الأرض حتى يتقاطع مع المستقيم AB في النقطة k . نوجد k' ، ونرمس المسقط الشاقولي للمستقيم عبر النقاط k', c' .

● **المثال ٢٩ :** لدينا مستقيم AB ونقطة K مرور من النقطة K مستقيماً يرأزي AB (الشكل ١٢٤) .

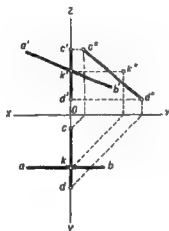
الحل : إن مساط المستقيم المطلوب يجب أن تمر من المساط الموافقة للنقطة K وهكذا فالمساطر المتألفة للمستقيمين المعطى والمطلوب يجب أن تتوأزي فيما بينها ومنه نرمس مساط المستقيم المطلوب : الأفقي (km) عبر k ويرأزي المستقيم ab والشاقولي ($k'm'$) عبر k' ويرأزي المستقيم $a'b'$.



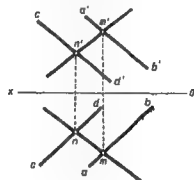
الشكل ١٢٢



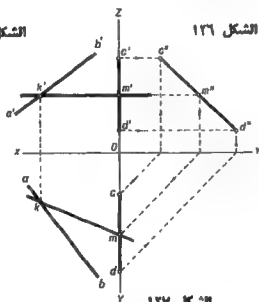
الشكل ١٢٤



الشكل ١٢٥



الشكل ١٢٦



الشكل ١٢٧

● المثال ٣٠ : لدينا مستقيم AB ونقطة K مرور من النقطة K مستقيماً يوازي AB (الشكل ١٢٥) .

الحل : المستقيم المطلوب كذلك جنبي . إن شرط توازي مستقيمين جنبيين كما هو معروف هو توازي المسقطين الجنبيين ومنه نوجد المسقط الجنبي $(a''b'')$ للمستقيم AB والمسقط الجنبي (k'') للنقطة k ثم نرسم من النقطة k'' المسقط الجنبي للمستقيم المطلوب موازياً للمستقيم $a''b''$ ولنعيده بالنقطتين $c''d''$ ثم نرسم المسقط الأفقي (cd) والمسقط الشاقولي $(c'd')$ بمساعدة المسقط الجنبي .

● المثال ٣١ : لدينا مستقيمان متوازيان $AB \parallel CD$ لإقطعها بمستقيم ما (الشكل ١٢٦) .

الحل : نأخذ على كل من المستقيمين AB, CD نقطة ما ، فالمستقيم الواصل بين هاتين النقطتين هو المستقيم المطلوب ، وبناء عليه نأخذ نقطة ما (m, m') على AB والنقطة (n, n') على المستقيم CD بعد ذلك نرسم المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب عبر النقاط m, n والمسقط الشاقولي للمستقيم عبر m', n' . يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقة أخرى . لنقطع المساقط الشاقولية بمستقيم ما ونعين نقاط التقاطع m', n' فبواسطة النقطة m' نوجد m على المسقط الأفقي للمستقيم AB وبمساعدة النقطة n' نوجد n على المسقط الأفقي للمستقيم CD نرسم من النقطتين m, n المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب .

يمكن أن نبدأ بحل المسألة كذلك يرسم المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب بصورة ما ثم نتبع الخطوات السابقة :

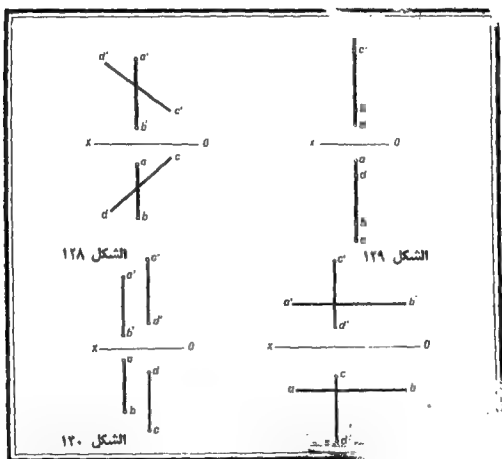
● المثال ٣٢ : لإقطع المستقيمين CD و AB بمستقيم يوازي مستوي الإسقاط الأفقي
(الشكل ١٢٧) .

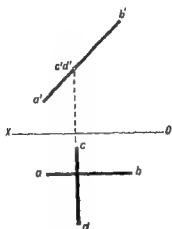
الحل : المستقيم المطلوب يجب أن يكون موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي
بناء عليه فمقطه الشاقولي يجب أن يوازي المحور ox ومنه نرمس مستقيماً شاقولياً
ما للمستقيم المطلوب موازياً لخط الأرض . نرمز لنقطتي التقاطع مع المستقيمين $a'h'$ ،
و $c'd'$ بـ k' و m' . من التقاط k' و m' نوجد على المستقيمين ab و cd
النقطتين $m \cdot k$. نمرر من $m \cdot k$ المقط الأفقي (km) للمستقيم المطلوب .

مسائل

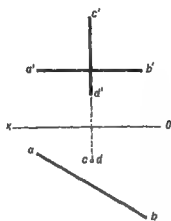
- ٤٣ - عين الرضعية المشتركة للمستقيمين CD و AB (الشكل ١٢٨ - ١٣٧) .
- ٤٤ - لإقطع المستقيم AB بمستقيم MN يمر من النقطة N ويوازي : مستوي
الإسقاط الأفقي (الشكل ١٣٨) ، مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ١٣٩) .
- ٤٥ - مرور من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB وخط الأرض (الشكل
١٤٠ و ١٤١) .
- ٤٦ - مرور من النقطة C مستقيماً يوازي المستقيم AB (الشكل ١٤٢ و ١٤٣) .
- ٤٧ - لإقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم MN يوازي : مستوي الإسقاط
الأفقي (الشكل ١٤٤) ، مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ١٤٥)
خط الأرض .
- ٤٨ - لإقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم EF يمر من النقطة M (الشكل
١٤٦ و ١٤٧) .

٤٩ - اقطع المستقيمات EF, CD, AB بمستقيم MN (الشكل ١٤٨ ,
١٤٩) .

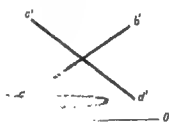




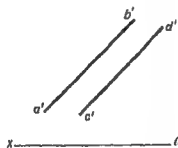
الشكل ١٣٢



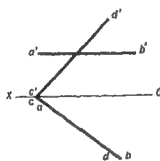
الشكل ١٣٣



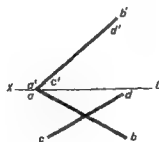
الشكل ١٣٤



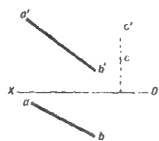
الشكل ١٣٥



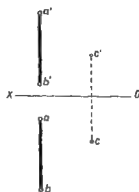
الشكل ١٣٦



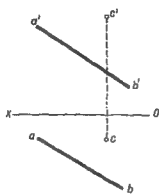
الشكل ١٣٧



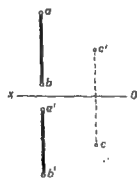
الشكل ١٣٨



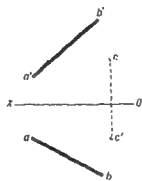
الشكل ١٣٩



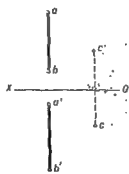
الشكل ١٤٠



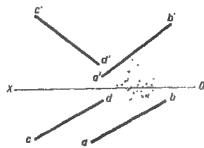
الشكل ١٤١



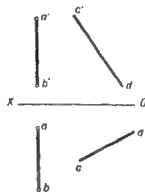
الشكل ١٤٢



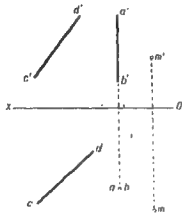
الشكل ١٤٣



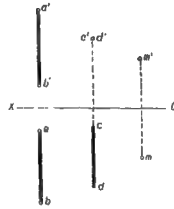
الشكل ١٤٤



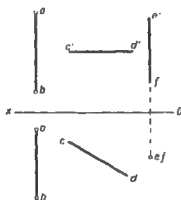
الشكل ١٤٥



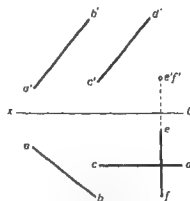
الشكل ١٤٦



الشكل ١٤٧



الشكل ١٤٨



الشكل ١٤٩

البحث الثامن

طول قطعة من مستقيم ، وزوايا ميل المستقيم على مستويات الإسقاط

تسقط قطعة مستقيمة في الفراغ موازية لأحد مستويات الإسقاط على ذلك المستوي بقيمة الحقيقية (أي بدون تغيير) .

فإذا كانت القطعة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي فالزاوية بين المسقط الأفقي لهذه القطعة وخط الأرض تساوي زاوية ميل القطعة نفسها على مستوي الإسقاط الشاقولي .

يعين طول قطعة مستقيمة بمساعدة مسافطها كوتر مثلث قائم الزاوية أحد أضلاعه القائمة عبارة عن أحد مسافات القطعة المعطاة أما الضلع القائم الثاني — فهو عبارة عن القيمة المطلقة للفرق الجبري لبعدي نهايتي المسقط الآخر للقطعة عن خط الأرض .

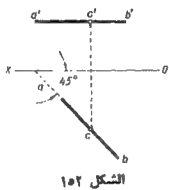
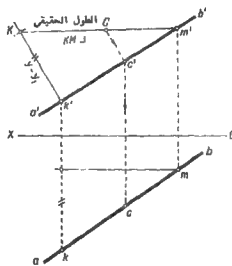
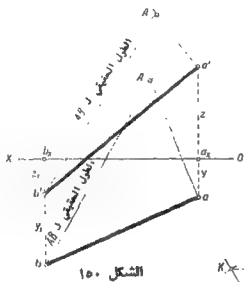
الزاوية الحاصلة بين الضلع القائم — المسقط الأفقي للقطعة — والوتر — الطول الحقيقي — تساوي إلى زاوية ميل القطعة نفسها على مستوي الإسقاط الأفقي .

الزاوية الحاصلة بين الضلع القائم — المسقط الشاقولي للقطعة — والوتر — الطول الحقيقي — تساوي إلى زاوية ميل القطعة نفسها على مستوي الإسقاط الشاقولي .

امثلة

● المثال ٣٣ : عين الطول الحقيقي للقطعة AB (الشكل ١٥٠)

الحل : لنرسم مثلثاً قائم الزاوية ، ولنأخذ كأحد ضلعيه القائمين المسقط الأفقي (ab) للقطعة ، أما الضلع القائم الآخر فبطول يساوي $z + z_1$. إن وتر هذا المثلث سيعطينا الطول الحقيقي للقطعة .



يمكننا الوصول إلى نفس النتيجة برسم مثلث قائم الزاوية ، أحد ضلعيه القائمين
المسقط الشاقولي للقطعة ($a'b'$) وأما الضلع القائم الثاني فبطول $y_1 - y$. فالوتر
يسميناها طول الحقيقي للقطعة .

● المثال ٣٤ : عيّن على المستقيم AB اعتباراً من النقطة K قطعة طولها 28 mm
بالإنجاء من النقطة A نحو النقطة B (الشكل ١٥١) .

الحل : نأخذ على المستقيم AB قطعة ما KM ولنعين قيمتها الحقيقية . لهذا
نرسم مثلثاً قائم الزاوية ضلعيه القائمين ($k'm'$) و $|y - y_1|$. نأخذ على وتر
المثلث المنشأ قطعة kc بطول 28 mm ، ثم نسقط عموداً من النقطة c على المستقيم
 $a'b'$ فيقطعها في النقطة c' . وهكذا بمساعدة النقطة c' نوجد النقطة c على المستقيم
ab ، إن مساقط القطعة المطلوبة هي ($k'c'$ و kc) .

● المثال ٣٥ : مور من النقطة C مستقيماً موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي ويضع
مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية مقدارها 45° . (الشكل ١٥٢) .

الحل : بما أن المستقيم AB يوازي مستوي الإسقاط الأفقي ، فسقطه الشاقولي
يجب أن يوازي خط الأرض ، فلكي يصنع المستقيم مع مستوي الإسقاط الشاقولي
زاوية 45° يجب أن يصنع مسقطه الأفقي مع خط الأرض زاوية تساوي 45° ، ومنه نرمس
من النقطة c' المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم بشكل يوازي خط الأرض ، ومن
النقطة c نرمس المسقط الأفقي للمستقيم (ab) بشكل يصنع زاوية 45° مع خط
الأرض ، هذه المستقيمتان - اثنان ، إنمارسم على الخط مستقيم واحد فقط .

● المثال ٣٦ : عين زوايا ميل المستقيم AB على مستويات الإسقاط (الشكل ١٥٣) .
الحل : لننشئ كما ذكرنا سابقاً المثلثين القائمين abB و $a'b'A$ ، فالزاوية « هـ » هي

زاوية ميل المستقيم المعطى بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي والزاوية β هي زاوية ميل المستقيم نفسه بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي .

● المثال ٣٧ : مرر من النقطة C مستقيماً يصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية α ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية β . $[\alpha + \beta < 90^\circ]$ (الشكل ١٥٤) .

الحل : مبدئياً نرمز على انفراد مستقيماً يميل على مستويات الإسقاط بالزوايا المفروضة . لهذا نأخذ نقطة ما A على مستوي الإسقاط الشاقولي ونمرر من مسقطها الشاقولي (a') مستقيماً $a'b_1$ يصنع مع خط الأرض زاوية α . على هذا المستقيم كوتر نرسم مثلثاً قائماً ذا زاوية β في رأسه a' ، ولهذا نقيم المستقيم $a'b_1$ إلى نصفين ثم نرمز نصف دائرة نصف قطرها $\frac{a'b_1}{2}$. بعد ذلك نرمز من النقطة a' ضلعاً قائماً يصنع مع المستقيم $a'b_1$ زاوية β ، فيقطع القوس في نقطة k ، نصل النقطة k إلى b_1 . الضلع القائم ka' يساوي بقيته المسقط الشاقولي للمستقيم المساعد . لكي نعيد وضعه نرمز من النقطة a' قوساً من دائرة نصف قطرها $a'k$ فيقطع خط الأرض في النقطة b' ، وعليه $a'b'$ — المسقط الشاقولي للمستقيم المساعد .

إن الضلع kb_1 يعين فرق بعدي نهائي المسقط الأفقي للمستقيم عن خط الأرض . لكي نرمز المسقط الأفقي للمستقيم ، نرفع من النقطة b' عموداً على خط الأرض ونعين عليه قطعة $b'b$ تساوي القطعة kb_1 . بوصل النقطتين b, a نحصل على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم المساعد . الآن يبقى أن نرمز من المسطتين (c,c') للنقطة C المسطتين (mn, m'n') للمستقيم المطلوب بحيث يوازي مسطتي المستقيم المنشأ سابقاً (ab, a'b') .

ملاحظة : يمكن أخذ النقطة A على مستوي الإسقاط الأفقي . على الطالب دراسة هذه الحالة بنفسه .

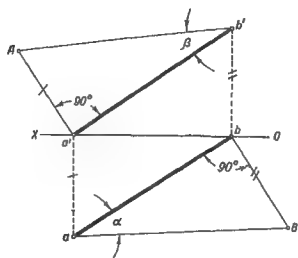
● المثال ٢٨ : لدينا مستقيم CB ونقطة A . مرور من النقطة A مستقيماً يقطع المستقيم BC بزاوية مطعاه θ (الشكل ١٥٥) .

الحل : نضم المستقيم $(bc, b'c')$ والنقطة (a, a') في مثلث $(abc, a'b'c')$ ونعين أبعاده الحقيقية . ننشئ لهذا مثلثاً مساعداً ABC ونمرر من النقطة A المستقيمين AM و AN اللذين يصنعان مع المستقيم BC الزاوية θ ، بعد ذلك نعين على المستقيم bc واعتباراً من النقطة b القطعتين bM و bN المساويتين للقطعتين BM و BN ، ثم نسط أعمدة من النقاط M و N على المستقيم bc فنصل على النقطتين m و n . ومن ثم نوجد m', n' . المستقيمان $(am, a'm')$ و $(an, a'n')$ هما المستقيمان المطلوبان .

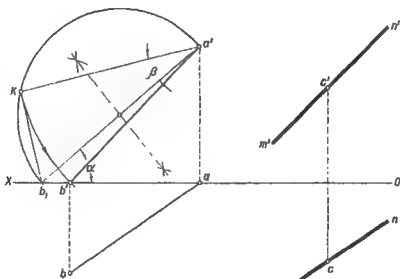
● المثال ٢٩ : لدينا مستقيم BC ونقطة A . عين على BC نقطة تبعد عن النقطة A بمقدار مفروض $l\text{ mm}$ (الشكل ١٥٦) .

الحل : نضم المستقيم $(bc, b'c')$ والنقطة (a, a') في مثلث $(abc, a'b'c')$ ونعين أبعاده الحقيقية . ننشئ لهذا مثلثاً مساعداً ABC ثم نرسم من النقطة A قوساً بنصف قطر $l\text{ mm}$ ، فيقطع الضلع BC في النقطتين N, M نأخذ على المستقيم bc اعتباراً من النقطة b قطعتين bM و bN مساويتين للقطعتين BM و BN ، ثم نسط أعمدة من النقطتين M و N على المستقيم bc فنصل على النقطتين m و n ، وبمساعدهتها نوجد النقطتين m' و n' . النقطتان (m, m') و (n, n') هما النقطتان المطلوبتان

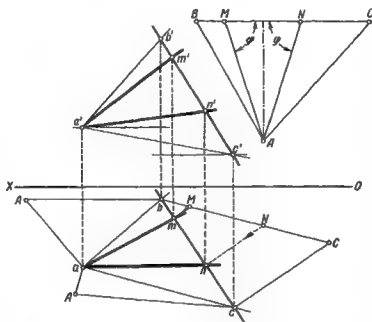
حالة خاصة : يمكن الحصول على نقطة واحدة (متى ؟) ويمكن أن لا نحصل على أي نقطة (متى ؟) .



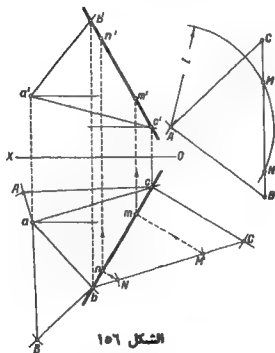
الشكل ١٥٣



الشكل ١٥٤



الشكل ١٥٥



الشكل ١٥٦

● المثال ٤٠ : لدينا مثلث ABC . ارسم منصف الزاوية A (الشكل ١٥٧) .

الحل : لتوجد القيمة الحقيقية للمثلث ($abc, a'b'c'$) . ننشئ مثلثاً ماعداً ABC ونرسم منصف الزاوية A الذي يقطع الضلع BC في النقطة M . نأخذ على المستقيم $b'C'$ واعتباراً من النقطة b' قطعة $b'M$ مساوية لـ BM ، ثم نقط من النقطة M عموداً على المستقيم $b'C'$ فنحصل على النقطة m' ، ومنها نعين النقطة m . المستقيم ($am, a'm'$) هو المستقيم المطلوب .

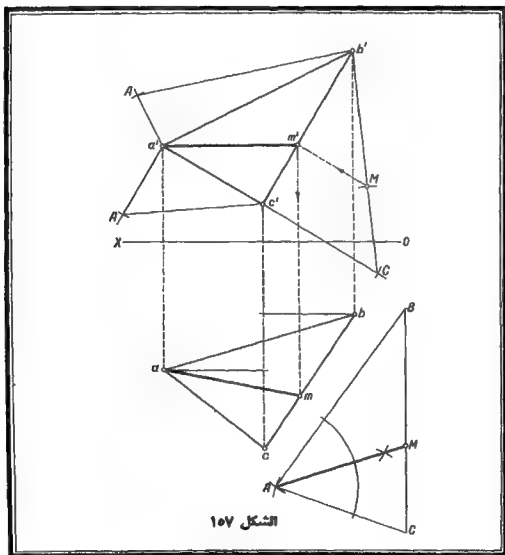
● المثال ٤١ : لدينا مستقيم AB يقطع خط الأرض . ارسم منصف الزاوية الحاصلة بين المستقيم AB وخط الأرض (الشكل ١٥٨) .

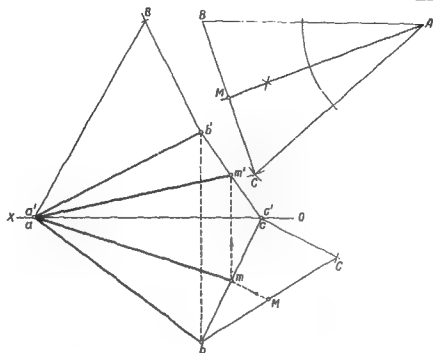
الحل : لناخذ نقطة ما (c, c') على خط الأرض ولنصلها بالنقطة (b, b') فنحصل على المثلث ($abc, a'b'c'$) . نعين القيمة الحقيقية لهذا المثلث ، ما تبقى يتضع من الخطط (انظر المثال ٤٠) .

● المثال ٤٢ : لدينا نقطة A ومستقيم MN . أنشئ شبه منحرف قائم ABCD إذا علم أن القاعدة الكبرى BC تقع على المستقيم MN ، وأن القاعدة الصغرى AD تساوي AB ، أما الضلع الجانبي DC فيساوي $AB \cdot 1.15$ (الشكل ١٥٩) .

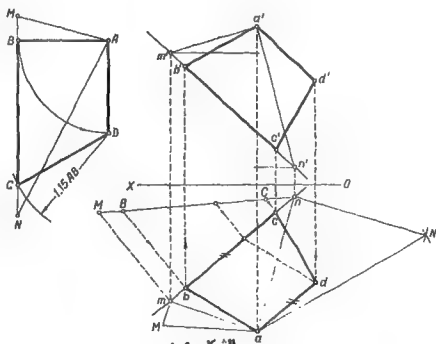
الحل : لتعين الرؤوس B , C, D لشبه منحرف نستعمل مثلث مساعد ، لهذا نضم المستقيم ($mn, m'n'$) والنقطة (a, a') في مثلث ($amn, a'm'n'$) ، ونعين قيمته الحقيقية . ننشئ على انفراد المثلث AMN . الزاوية B هي مسط العمود النازل من النقطة A على الضلع MN . نرر من النقطة A مستقيماً يوازي

الضلع MN ، وناخذ عليه قطعة بطول AB فنحصل على الرأس D . لتعين الرأس C نرسم من النقطة D قوساً بنصف قطر يساوي AB 1,15 فيقطع المستقيم MN في النقطة C . والآن يبقى أن ننجز ذلك بالسلسلة على الخطوط . الإنشاء مبين على الشكل .





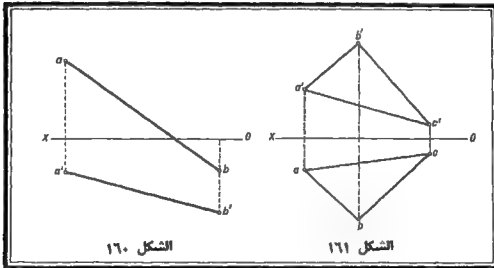
الشكل ١٥٨



الشكل ١٥٩

مسائل

- ٥٠ - عين الطول الحقيقي لقطعة مستقيمة AB وزوايا ميلها على المستويات V, H (الشكل ١٦٠) .
- ٥١ - ما هو المعنى الهندسي لتوازي مسطحي مستقيم ذي وضعية عامة على المخطط ؟
- ٥٢ - مرر من نفس النقطة $A (20 , 35)$ مستقيماً يميل على المستويين V, H بنفس الميل (المسألة غير معينة) .
- ٥٣ - أنشئ القيمة الحقيقية للمثلث ABC (الشكل ١٦١) .



٥٤ - مرر من النقطة (35 و 20) A مستقيماً يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي ويضع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية قدرها 45° . ماهو عدد هذه المستقيمات ؟

٥٥ - مرر من النقطة (30 و 20) A مستقيماً يصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 30° ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 45° . ماهو عدد هذه المستقيمات ؟

٥٦ - خذ على المستقيم AB قطعة بطول 15mm وذلك لإعتباراً من النقطة A وباتجاه النقطة B (الشكل ١٦٢) .

٥٧ - أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٨ - أوجد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٩ - ارم منصف الزاوية ABC (الشكل ١٦٤ ، ١٦٥) .

٦٠ - أسقط من النقطة A عموداً على المستقيم BC (الشكل ١٦٦) .

٦١ - عيّن بعد النقطة A عن المستقيم BC (الشكل ١٦٦) .

٦٢ - عيّن البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٦٧) .

٦٣ - ارم كرة مركزها في النقطة C وتمس للمستقيم AB (الشكل ١٦٨) .

٦٤ - أوجد نقطة على المستقيم AB تبعد عن النقطة C بمقدار 30 mm (الشكل

١٦٨) . ماهي الحالات الممكنة ؟

٦٥ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع سطح كرة (الشكل ١٦٩) .

ماهي الحالات الممكنة ؟

٦٦ - ارسم من النقطة C كرة تقطع من مستقيم معلوم AB قطعة بطول 40 mm (الشكل ١٦٨) .

٦٧ - أنشئ مثلثاً ABC قائماً في النقطة C الواقعة على المستقيم MN (الشكل ١٧٠) . ماهي الحالات الممكنة ؟

٦٨ - مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية حادة θ تساوي 30° أو 40° أو 60° (الشكل ١٦٨) . كم يبلغ عدد هذه المستقيمت ؟

٦٩ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN . إذا كان طول الساق 1,25 من الارتفاع (الشكل ١٧١) .

٧٠ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN . إذا كان طول القاعدة أكبر بمرتين ونصف من الارتفاع (الشكل ١٧١) .

٧١ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN . إذا كانت زاوية القاعدة تساوي 80° (الشكل ١٧١) .

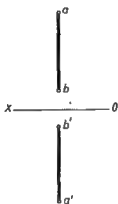
٧٢ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN (الشكل ١٧١) .

٧٣ - ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN . إذا كان طول الوتر يساوي 1,25h (الشكل ١٧٢) .

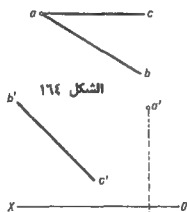
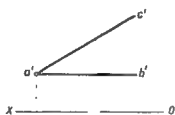
٧٤ - ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN . إذا كانت الزاوية الحادة C تساوي 30° (الشكل ١٧٢) .

٧٥ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC بحيث يقع وتره BC على المستقيم MN (الشكل ١٧١) .

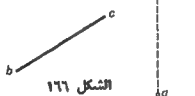
٧٦ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC بحيث يقع ضلعه القائم BC على



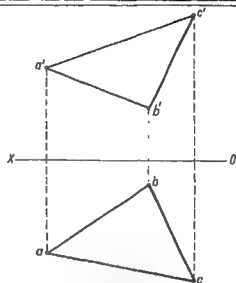
الشكل ١٦١



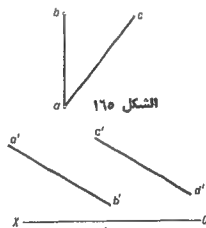
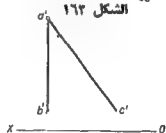
الشكل ١٦٤



الشكل ١٦٦



الشكل ١٦٢



الشكل ١٦٧

المستقيم MN (الشكل ١٧٢) .

٧٧ - ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت مساحته تساوي $1.5 AB^2$ (الشكل ١٧٢) .

٧٨ - ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت نسبة ضلعيه تساوي 1,5 (الشكل ١٧٢) .

٧٩ - ارسم مربعاً ABCD بحيث يقع ضلعه BC على المستقيم MN (الشكل ١٧٢) .

٨٠ - ارسم مربعاً ABCD بحيث يقع قطره BD على المستقيم MN (الشكل ١٧١) .

٨١ - ارسم معيناً ABCD بحيث يقع ضلعه BC على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه يساوي 1,2 من إرتفاعه (الشكل ١٧١) .

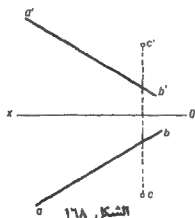
٨٢ - ارسم معيناً ABCD بحيث يقع ضلعه BC على المستقيم MN ، إذا كانت الزاوية الحادة B تساوي 60° (الشكل ١٧١) .

٨٣ - ارسم معيناً ABCD بحيث يقع قطره الكبير BD على المستقيم MN إذا كانت نسبة قطريه تساوي 2 (الشكل ١٧١) .

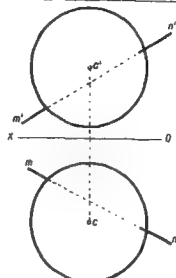
٨٤ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ، بحيث تقع قاعدته BC على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة B تساوي 60° وكان طول القطر AC أكبر من الضلع الجانبي بمقدار 5 mm (الشكل ١٧١) .

٨٥ - ارسم متوازي أضلاع ABCD بحيث تقع قاعدته BC على المستقيم MN ، على أن يكون طول ضلعه الجانبي مساوياً لـ $1,25 h$ ، أما نسبة ضلعيه فتساوي 2 (الشكل ١٧١) .

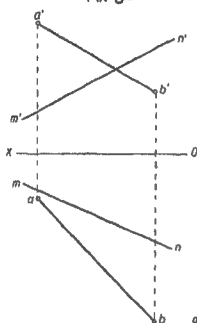
٨٦ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم



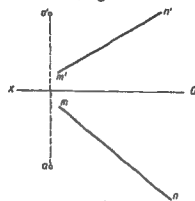
الشكل ١٦٨



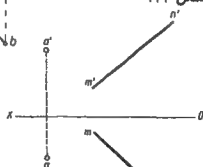
الشكل ١٦٩



الشكل ١٧٠



الشكل ١٧١



الشكل ١٧٢

MN بشرط أن يكون $AD=AB$ وأن يكون $DC=1.15 AB$ (الشكل ١٧٢) .

٨٧ - ارسم شبه منحرف قائم $ABCD$ بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN بشرط أن يكون $AD = AB = \frac{2}{3} BC$ (الشكل ١٧٢) .

٨٨ - ارسم شبه منحرف قائم $ABCD$ بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN شريطة أن يكون $AD=AB$ ، وأن تكون الزاوية $C=45^\circ$ (الشكل ١٧٢) .

٨٩ - ارسم شبه منحرف متساوي الساقين $ABCD$ بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN ، بشرط أن يكون $AB=AD=DC=40mm$ (الشكل ١٧١) .

٩٠ - ارسم شبه منحرف متساوي الساقين $ABCD$ بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN بشرط أن تكون الزاوية الحادة $B=C$ وتساوي 45° أما القاعدة الصغرى فتساوي الضلع الجانبي (الشكل ١٧١) .

البحث التاسع

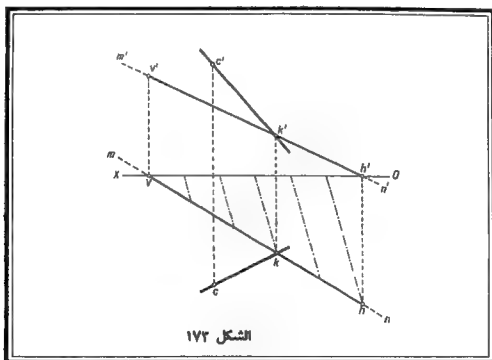
تقسيم قطعة بنسبة معينة

إذا قسمت نقطة قطعة مستقيمة في الفراغ بنسبة $\frac{m}{n}$ فإن مسافات النقطة ستقسم المسافات المأثلة للقطعة بنفس النسبة .

بناء عليه لتقسيم قطعة (على المخطط) بنسبة معينة لالزوم لتعيين طولها الحقيقي .

امثلة

● المثال ٤٣ : لدينا مستقيم MN ونقطة C . مرور من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم المفروض في نقطة تقسم القطعة الواقعة بين الأتوين بنسبة $\frac{2}{3}$. بالإنجاء من H إلى V (الشكل ١٧٣) .



الحل : حسب القاعدة المعروفة نوجد أثري المستقيم $(mn, m'n')$ ونقسم أحد مسقطيه مثلاً الأثري بالنسبة المفروضة $\frac{2}{3}$ بالنقطة k . بمساعدة النقطة k نوجد المسقط الشاقولي (k') للنقطة على المسقط الشاقولي $(m'n')$ للمستقيم MN . بعد ذلك نرسم مسقطي المستقيم المطلوب بوصل المساط المتأثرة النقطتين K و C أي نرسم المسقط الأفقي للمستقيم من النقطة k و c والمسقط الشاقولي للمستقيم من النقطة k' و c' .

مسائل

٩١ - أوجد النقطة C التي تقسم القطعة AB بنسبة $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ (الشكل ١٧٤) .

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{3} \text{ (الشكل ١٧٥) .}$$

٩٢ - مرر من النقطة C مستقيماً يقطع القطعة AB في نقطة تقسمها بنسبة

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3} \text{ (الشكل ١٧٦) .}$$

٩٣ - أوجد مركز ثقل سطح المثلث ABC (الشكل ١٦٣)

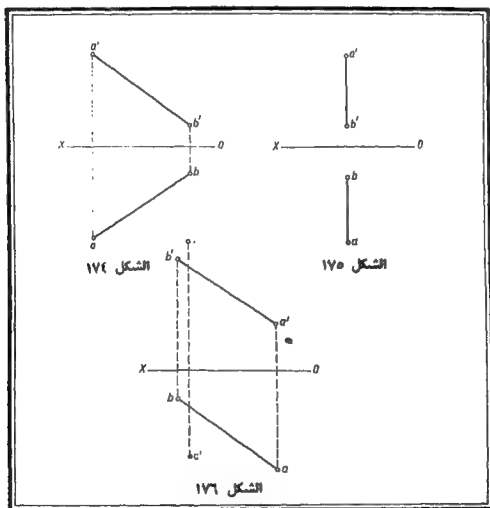
٩٤ - أوجد مركز ثقل محيط المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

البحث العاشر

بعض حالات إسقاط الزوايا

إن أي زاوية يتوازي ضلعاها مع أحد مستويات الإسقاط تسقط على ذلك المستوي دون انحراف أو تغيير .

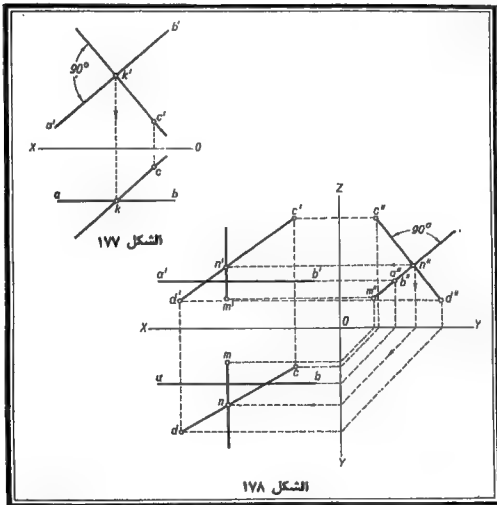
• الزاوية القائمة التي يوازي أحد ضلعها على الأقل أحد مستويات الإسقاط
 تسقط على ذلك المستوي بشكل زاوية قائمة أيضاً. (أي دون تغيير). وهكذا
 نرى أنه إذا أعطى في الفراغ مستقيمان متقاطعان متعامدان وكان أحدهما يوازي
 مستوي الإسقاط ، فإن مسقطها على مستوي الإسقاط هذا سيكون بشكل
 مستقيمين متعامدين « انظر البحث السابع حول تعامد مستقيمين » .



المقدمة

● **المثال ٤٤ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C ، مرور من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية قائمة (الشكل ١٧٧) .

الحل : إن المستقيم المطلوب يجب أن يحقق في الفراغ الشروط الثلاث : أن يمر



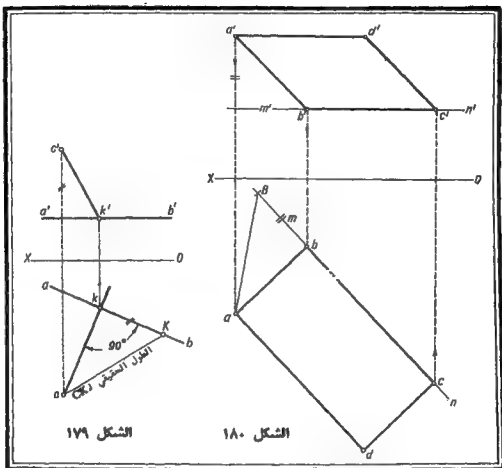
من النقطة C ، وأن يتعامد مع المستقيم AB وأن يوازي متوي الإسقاط الشاقولي وأت يقطع المستقيم AB . على المخطط مساقط المستقيم المطلوب يجب أن تمر من المساط الموازية للنقطة C . المساط الشاقولية للمستقيمين المعطى والمطلوب يجب أن تتعامد ، وأخيراً نقاط تقاطع المساط المتأصلة يجب أن تقع على عمود واحد على خط الأرض . بناء عليه فهو من النقطة c' المسط الشاقولي للمستقيم المطلوب بصورة عمودية على المستقيم $a'b'$ فيقطع في k' . من النقطة k' توجد النقطة k على المسط الأفقي (ab) للمستقيم AB ومنها نرسم المسط الأفقي (ek) للمستقيم المطلوب .

● المثال ٤٥ : لإقطع المستقيمين AB و CD بثالث عمودي عليها (الشكل ١٧٨) .

الحل : إن المستقيم المطلوب MN هو مستقيم جنبي وذلك لأنه يجب أن يكون عمودياً على المستقيم AB الذي يوازي خط الأرض . فلكي يتعامد المستقيم المطلوب MN مع المستقيم CD أيضاً يجب أن تكون مساطها الجنية $(c'd')$ و $(m'n')$ متعامدة فيما بينها نظرية إسقاط الزاوية القائمة . وهكذا نرسم من $a'b'$ خطاً مستقيماً $m'n'$ عمودياً على $c'd'$ فيتقاطعا في النقطة n' . بعد ذلك توجد n و n' على السطرين الواقعين للمستقيم CD ثم نرسم المستقيم $(mn, m'n')$.

● المثال ٤٦ : لدينا مستقيم AB ونقطة C . عين بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ١٧٩) .

الحل : نازل من النقطة (c, c') عموداً على المستقيم $(ab, a'b')$ ونعين نقطة تقاطعه (k, k') . لهذا نرسم من النقطة c عموداً على المستقيم ab فنحصل عند تقاطعها على النقطة k ، منها توجد النقطة k' وبعد ذلك نعين الطول الحقيقي للنقطة $(ck, c'k')$.



● المثال ٤٧ : لدينا المستقيم MN الموازي لمستوي الإسقاط الأفقي ، والنقط الشاقولي للمستقيم AB المتعامد معه . لرسم مستطيلاً ABCD قاعدته BC واقعة على المستقيم MN على أن يكون طولها $AB = 1,5$ (الشكل ١٨٠) .

الحل : نعين النقطة b ونمرر منها مستقيماً عمودياً على المستقيم mn فنعين :
 المسقط الأثني (ab) للضلع الجانبي . نوجد القيمة الحقيقية aB للضلع
 ($ab, a'b'$) ثم نأخذ على المستقيم ($mn, m'n'$) إعتباراً من النقطة (b, b') قطعة
 بطول aB فنصل على النقطة (c, c') . من هذه النقطة ومن النقطة (a, a')
 نمرر مستقيمين موازيين للضلعين الآخرين ($ab, a'b'$) و ($bc, b'c'$) .

مماثل

٩٥ - ممر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويتعامد معه (الشكل
 ١٨١ - ١٨٥) .

٩٦ - لإقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم عمودي عليهما (الشكل ١٨٦ و ١٨٧) .

٩٧ - أنزل من النقطة C عموداً على المستقيم AB (الشكل ١٨٨ و ١٨٩) .

٩٨ - عيّن بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ١٨٨ و ١٨٩) .

٩٩ - عيّن البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٩٠ - ١٩٤) .

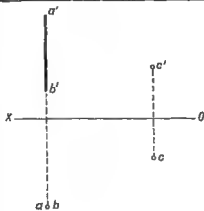
١٠٠ - عيّن البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ١٩٥ و ١٩٦) .

١٠١ - أوجد المسقط الناقص للنقطة C إذا علمت أن البعد l بين

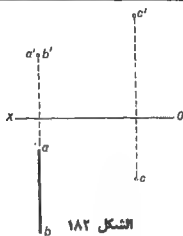
النقطة C والمستقيم AB يساوي 30 mm (الشكل ١٩٧ - ٢٠١) .
 ماهي الحالات الممكنة ؟

١٠٢ - أوجد المسقط الناقص للمستقيم CD الذي يوازي المستقيم AB إذا

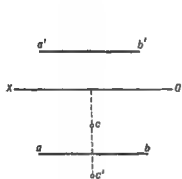
علمت أن المسافة بينها $l = 20 \text{ mm}$ (الشكل ٢٠٢ - ٢٠٦) .
 ماهي الحالات الممكنة ؟



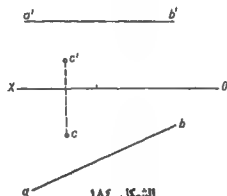
الشكل ١٨١



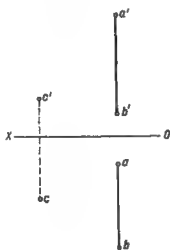
الشكل ١٨٢



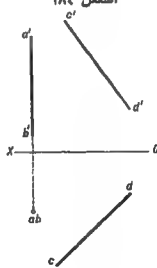
الشكل ١٨٣



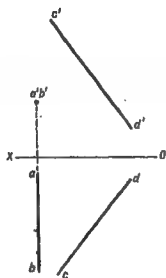
الشكل ١٨٤



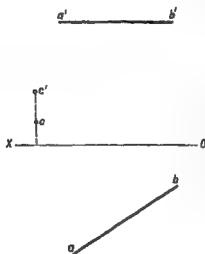
الشكل ١٨٥



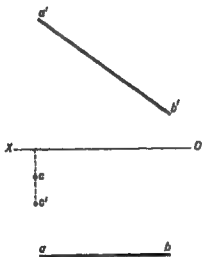
الشكل ١٨٦



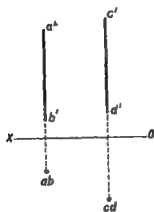
الشكل ١٨٧



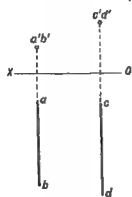
الشكل ١٨٨



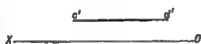
الشكل ١٨٩



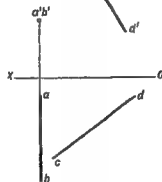
الشكل ١٩٠



الشكل ١٩١



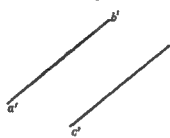
الشكل ١٩٢



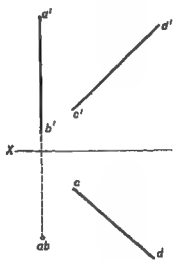
الشكل ١٩٥



الشكل ١٩٢



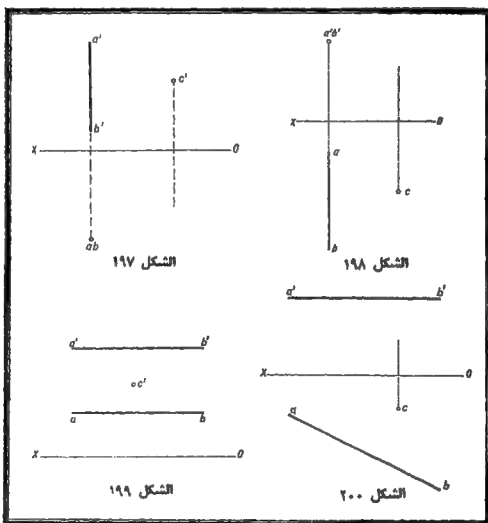
الشكل ١٩٤

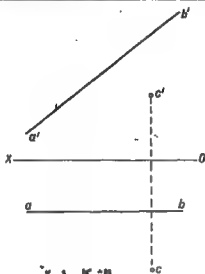


الشكل ١٩٦

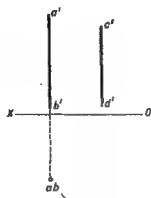
١٠٣- ارسم كرة مركزها في النقطة C وقس المستقيم AB
(الشكل ٢٠٧، ٢٠٨).

١٠٤- عين على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة C بقدر 40mm
(الشكل ٢٠٩). ماهي الحالات الممكنة ؟

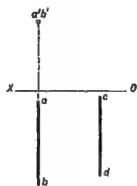




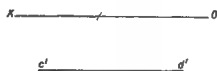
الشكل ٢٠١



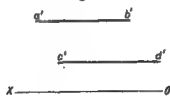
الشكل ٢٠٢



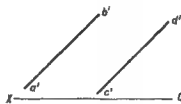
الشكل ٢٠٣



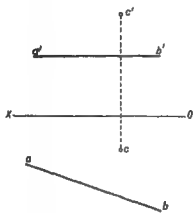
الشكل ٢٠٤



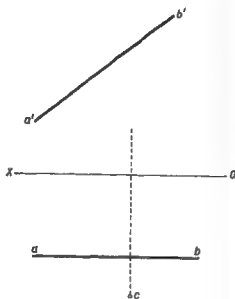
الشكل ٢٠٥



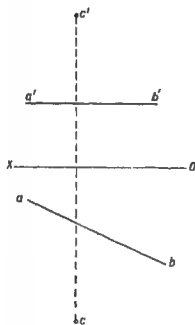
الشكل ٢٠٦



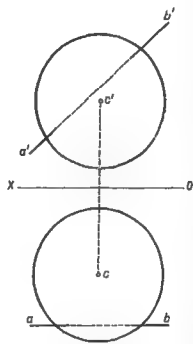
الشكل ٢٠٧



الشكل ٢٠٨



الشكل ٢٠٩



الشكل ٢١٠

١٠٥ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع سطح كرة (الشكل ٢١٠).
ما هي الحالات الممكنة ؟

١٠٦ - ارسم من النقطة C كرة تمس على مستقيم معلوم AB قطعة طولها $l = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٢١١).

١٠٧ - ارسم مثلثاً ABC قائماً في B الواجهة على المستقيم EF (الشكل ٢١٢). ما هي الحالات الممكنة ؟

١٠٨ - مرر من النقطة N مستقيماً يقطع المستقيم MN وفق زاوية حادة φ تساوي 30° أو 45° أو 60° (الشكل ٢١٣). ما هو عدد هذه المستقيمتين ؟

١٠٩ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول الساق $1,25 h$ (الشكل ٢١٤).

١١٠ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN على أن يكون طولها $1,5 h$ (الشكل ٢١٥).

١١١ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN على أن تكون زاوية قاعدته مساوية 30° (الشكل ٢١٤).

١١٢ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ، على أن يكون ساقه أكبر من إرتفاعه بمقدار 10 mm (الشكل ٢١٤).

١١٣ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ، ورأسه A واقع على المستقيم EF بحيث تكون النقطة K أساساً لإرتفاعه AK ، وأن يكون الساق مساوياً AK (الشكل ١١٩).

١١٤ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC على أن تكون قاعدته BC (60 mm) واقعة على المستقيم MN ، ورأسه A واقفاً على المستقيم EF العمودي على MN بحيث يكون ارتفاع المثلث مساوياً 40 mm. (الشكل ٢١٧).

١١٥ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون ارتفاعه AD مساوياً 40 mm ويقع على المستقيم EF ، وأن تكون زاوية قاعدته مساوية 90° ، (الشكل ٢١٧).

١١٦ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٢١٨).

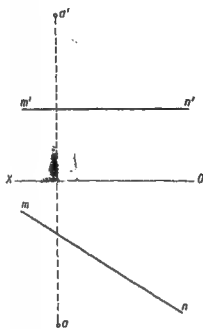
١١٧ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN (الشكل ٢١٤).

١١٨ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن تكون النقطة K أساساً للارتفاع (الشكل ٢١٩).

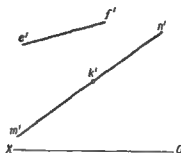
١١٩ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون $AD = AB$ ، $DC = 1,15AB$ (الشكل ٢٢٠).

١٢٠ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون ارتفاعه AD يساوي 40 mm ويقع على المستقيم EF (الشكل ٢١٧).

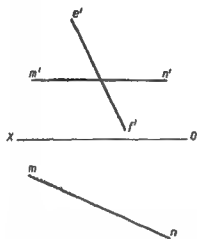
١٢١ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC تساوي 50 mm وتقع على المستقيم MN ، ورأسه A يقع على المستقيم EF العمودي على MN (الشكل ٢١٧).



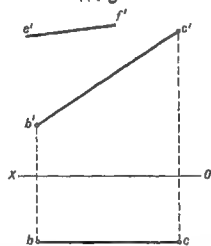
الشكل ٢١٥



الشكل ٢١٦



الشكل ٢١٧



الشكل ٢١٨

١٢٢ - ارسم مثلثاً قائماً ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN شريطة أن يكون وتره مساوياً $1,25h$ (الشكل ٢٢٠) .

١٢٣ - ارسم مثلثاً قائماً ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون زاوية الحادة C مساوية 30° (الشكل ٢٢٠) .

١٢٤ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، وتره AC واقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢١) .

١٢٥ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢٠) .

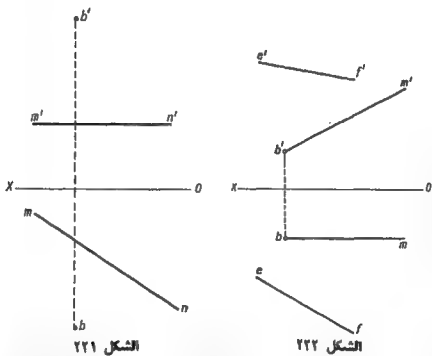
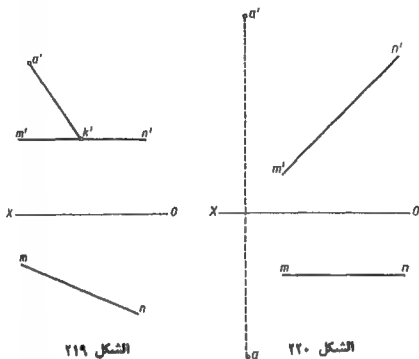
١٢٦ - ارسم مثلثاً قائماً ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN ، شريطة أن يكون نصف قطر الدائرة المارة من رؤوس المثلث مساوياً $0,75 AB$ (الشكل ٢٢٠) .

١٢٧ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم BM ، ورأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٢٢٢) .

١٢٨ - ارسم مثلثاً قائماً ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون ضلعه القائم AB الذي طوله 30 mm واقعاً على المستقيم EF ، وأن تكون مساحة المثلث $0,75 AB^2$ (الشكل ٢٢٣) .

١٢٩ - ارسم مستطيلاً $ABCD$ ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون مساحته مساوية $1,5 AB^2$ (الشكل ٢٢٠) .

١٣٠ - ارسم مستطيلاً $ABCD$ ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون نسبة ضلعيه $1,5$ (الشكل ٢٢٠) .



١٣١ - ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم BM
شرطه أن تكون نسبة ضلعيه 2 (الشكل ٢٢٤) .

١٣٢ - ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم BM ،
ورأسه A واقع على المستقيم EF شرطه أن يكون قطره مساوياً
2 AB (الشكل ٢٢٢) .

١٣٣ - ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم
MN ، على أن يكون ضلعه AB الذي طوله 40 mm واقعاً
على المستقيم EF ، وعلى أن تكون النسبة بين ضلعيه 1:5 (الشكل
٢٢٣) .

١٣٤ - ارسم مستطيلاً ABCD ، رأسه A واقع على المستقيم EF ، احسب
مساحته (الشكل ٢٢٥) .

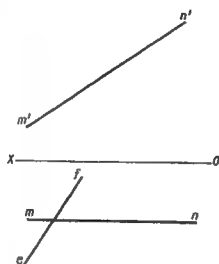
١٣٥ - ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه BC يقع على المستقيم MN (الشكل
٢٢٠) .

١٣٦ - ارسم مربعاً ABCD ، قطره BD يقع على المستقيم MN (الشكل
٢١٤) .

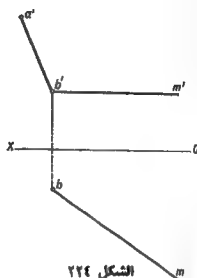
١٣٧ - ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه AB يقع على المستقيم BE (الشكل
٢٢٦) .

١٣٨ - ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه BC يقع على المستقيم BM (الشكل
٢٢٤) .

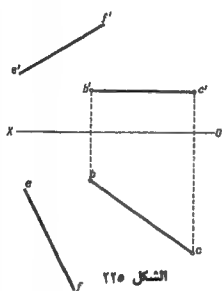
١٣٩ - ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه BC يقع على المستقيم BM شرطه أن



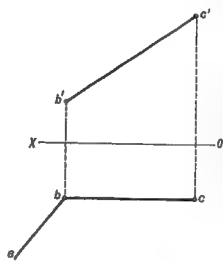
الشكل ٢٢٣



الشكل ٢٢٤



الشكل ٢٢٥



الشكل ٢٢٦

يقع رأسه A على المستقيم EF (الشكل ٢٢٧) .

١٤٠ - ارسم مربعاً ABCD ، قطره BD يقع على المستقيم MN شريطة أن يقع رأسه A على المستقيم EF ، وأن تكون النقطة K نقطة تقاطع قطريه . (الشكل ٢١٦) .

١٤١ - ارسم مربعاً ABCD ، قطره BD يقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢٨) .

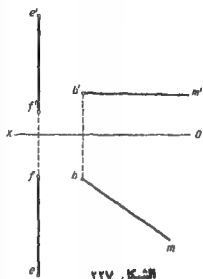
١٤٢ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن تكون زاويته الحادة B مساوية 80° ، وأن يكون طول قطره AC أكبر بمقدار 5mm من ضلعه الجانبي (الشكل ٢٣٠) .

١٤٣ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون طول ضلعه الجانبي $1.25h$ وأن تكون نسبة ضلعيه مساوية 2 (الشكل ٢٣٠) .

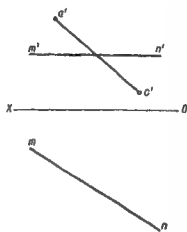
١٤٤ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون $BC = \frac{2}{3} AD = AB$ (الشكل ٢٣٠) .

١٤٥ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN ، ورأسه A واقع على المستقيم EF شريطة أن يكون ضلعه AB أكبر من ارتفاعه AK بمقدار 5mm ، وأن يكون ضلعه BC مساوياً $1.5Ak$ (الشكل ٢٢٩) .

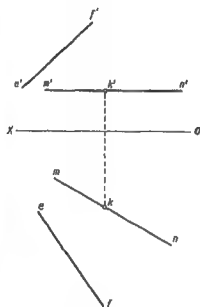
١٤٦ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ، ضلعه BC بطول 60mm يقع على



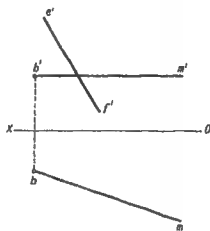
الشكل ٢٢٧



الشكل ٢٢٨



الشكل ٢٢٩



الشكل ٢٣٠

المستقيم BM شريطة أن يكون ارتفاعه AK واقعاً على المستقيم EF
وأن يكون طول ضلعه الجانبي مساوياً 40 mm (الشكل ٢٣٠) .

١٤٧ - ارسم معيناً ABCD ، ضلعه BC واقع على المستقيم MN ، شريطة
أن يكون طول ضلعه $1,2h$ (الشكل ٢٢٠) .

١٤٨ - ارسم معيناً ABCD ، ضلعه BC واقع على المستقيم MN شريطة أن
تكون زاويته الحادة B مساوية 60° (الشكل ٢٢٠) .

١٤٩ - ارسم معيناً ABCD ، قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN شريطة
أن تكون نسبة قطريه 2 (الشكل ٢١٥) .

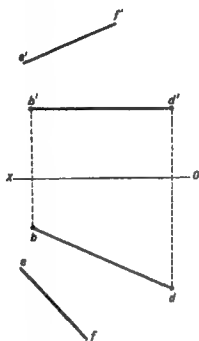
١٥٠ - ارسم معيناً ABCD ، ضلعه BC واقع على المستقيم MN شريطة أن
يساوي ضلعه $1,2$ من ارتفاعه AK (الشكل ٢١٩) .

١٥١ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على
المستقيم MN شريطة أن يكون $AD = AB$ ، وأن تكون الزاوية C
مساوية $30^\circ , 45^\circ , 60^\circ$ (الشكل ٢٢٠) .

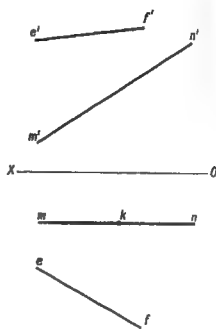
١٥٢ - ارسم معيناً ABCD ، قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN
شريطة أن يكون قطره الصغير الذي طوله 40 mm واقعاً على المستقيم
EF ، أما مساحة المعين فتساوي AC^2 (الشكل ٢١٧) .

١٥٣ - ارسم معيناً ABCD ، رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٢٣١) .

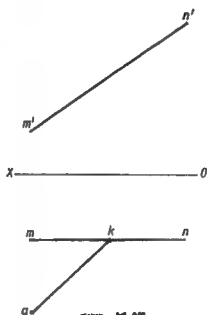
١٥٤ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC تقع على المستقيم
MN ، أما رأسه A فيقع على المستقيم EF ، شريطة أن تكون النقطة K
أساساً لارتفاعه AK (الشكل ٢٣٢) .



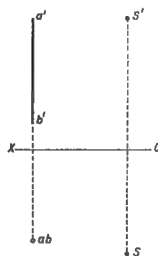
الشكل ٢٣١



الشكل ٢٣٢



الشكل ٢٣٣



الشكل ٢٣٤

١٥٥ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون النقطة K أساساً لارتفاعه وتقسّم الضلع بنسبة $\frac{1}{2}$ من النقطة B نحو النقطة C ، وأن تكون الزاوية B مساوية 60° (الشكل ٢٢٣) .

١٥٦ - ارسم معيناً ABCD ، قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN ، ورأسه A واقع على المستقيم EF ، شريطة أن تكون النقطة K نقطة تقاطع قطريه ، وأن تكون نسبة القطرين 2 . (الشكل ٢٢٢) .

١٥٧ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM شريطة أن يكون $B = 90^\circ$ ، $CD = 1,2 AB$ ، $AD = AB$ (الشكل ٢٢٤) .

١٥٨ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM شريطة أن تكون ذروته A واقعة على المستقيم EF ، $AD = AB$ ، $B = 90^\circ$ ، $C = 70^\circ$ (الشكل ٢٢٧) .

١٥٩ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN وضلعه AB واقع على المستقيم EF شريطة أن يكون $B = 90^\circ$ ، $AB = AD = 40 \text{ mm}$ ، $C = 45^\circ$ (الشكل ٢٢٣) .

١٦٠ - ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون $AB = AD = DC = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٢٢٠) .

١٦١ - ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة

على المستقيم MN شريطة أن تكون زاوية الحادة مساوية 45° وأن تكون القاعدة الصغرى مساوية للضلع الجانبي (الشكل ٢٢٠) .

١٦٢ - مرر من النقطة S مستقيماً ميل بزاوية 70° على مستوى الإسقاط الأفقي وببعد عن المستقيم AB بمقدار 20 mm (الشكل ٢٣٤) .

• • •

الفصل الثاني

البحث الحادي عشر

المستوي

يمكن أن يعطى المستوي في الفراغ بالعناصر الهندسية التالية :

١ - ثلاث نقاط غير واقعة على مستقيم واحد .

٢ - مستقيم ونقطة غير واقعة على ذلك المستقيم .

٣ - مستقيمين متقاطعين

٤ - مستقيمين متوازيين .

إذا كان المستوي مائلاً على مستويات الإسقاط بشكل ما ندعوه بالمستوي ذي
الوضعية العامة أو بالمستوي الكبيفي .

إذا كان المستوي عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي ندعوه بالمستوي الشاقولي .

إذا كان المستوي عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي ندعوه بالمستوي الأمامي .

إذا كان المستوي عمودياً على مستوي الإسقاط الجنبى ندعوه بالمستوي الموازي

لخط الأرض .

النقطة الماخوذة على أحد المستويات المعينة للمستوي تقع في ذلك المستوي .

يقع المستقيم في المستوي إذا اشتبك مع المستوي بنقطتين .

المستقيم الأفقي في المستوي هو المستقيم الواقع في ذلك المستوي والموازي لمستوي

الإسقاط الأفقي .

المستقيم الجبهي في المستوي هو المستقيم الواقع في ذلك المستوي والموازي لمستوي الإسقاط الشاقولي .

خط الميل الأعظمي في المستوي هو المستقيم الواقع في ذلك المستوي والمتعامد مع مستقيم أفقي في المستوي .

تقع نقطة ما في المستوي إذا أخذت على مستقيم واقع في ذلك المستوي .
قبل حل الأمثلة المدرجة أدناه يجب قلم المسائل ١٦٣ - ١٧١ .

أمثلة

● المثال ٤٨ : مرر مستقيماً اختيارياً ما في مستو مفروض بمستيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٢٣٥) .

الحل : نأخذ على المستيمين (ab, a'b') (cd, c'd') نقطتين اختياريتين (m, m') (n, n') وغور منها المستقيم (mn, m'n') .

● المثال ٤٩ : مستوي مفروض بمستيمين متقاطعين AB, CD . هل يقع المستقيم MN في هذا المستوي (الشكل ٢٣٦) ؟

الحل : ل نرمز لنقاط تقاطع المساقط الشاقولية للمستيمين AB و MN بالحرف k' والمستيمين CD و MN بالحرف k . لننشئ مسقطيهما الأفقيين - النقطتين l, k . من الإنشاء واضح أن النقطتين (k, k') و (l, l') من المستقيم MN لاتتعان في المستوي المفروض بناء عليه المستقيم MN لا يقع في المستوي .

إن حل هذه المسألة يمكن أن نبدأ بتقاطع المساقط الأفقية - النقطتين l, k .

● المثال ٥٠ : مستوي مفروض بمستيمين متوازيين AB و CD . إذا علم المسقط

الأفقي لمستقيم MN واقع في هذا المستوي ، أوجد مسقطه الشاقولي . (الشكل ٢٣٧) .

الحل : نرسم نقطة تقاطع المستقيمين الأفقيين للمستقيمين AB و MN بالحرف k والمستقيمين CD و MN بالحرف l .

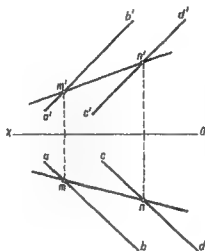
نعين بمساعدة النقطتين k و l النقطتين k' على المستقيم a'b' والنقطة l' على المستقيم c'd' ثم نرسم المسقط الشاقولي المنشود (m'n') للمستقيم عبر النقطتين k' و l' .

● **المثال ٥١ :** لدينا مستوي معين بمستقيم AB ونقطة C ، ارسم في المستوي مستقيماً أفقياً يبعد بمقدار 15mm عن مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٢٣٨) .

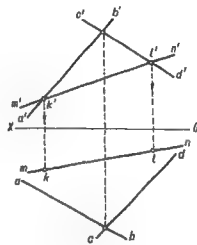
الحل : قبل كل شيء نحول المستوي المعين بمستقيم ونقطة إلى مستوي معين مثلاً بمستقيمين متقاطعين . لهذا نأخذ نقطة ما (k,k') على المستقيم (ab,a'b') ونرسم مساقط المستقيم (ck,c'k') . بعد ذلك نرسم على بعد 15 mm من خط الأرض المسقط الشاقولي (m'n') للمستقيم الأفقي بصورة موازية لخط الأرض فيقطع المستقيمين a'b' و c'k' في النقطتين d' و e' . أخيراً نوجد النقطتين d و e على المستقيمين ab و ck ويوصلها بنجد المسقط الأفقي (mn) للمستقيم الأفقي (على الخطوط نعين حلاً واحداً) .

● **المثال ٥٢ :** لدينا مستوي معين بمستقيمين متوازيين AB و CD . ارسم مستقيماً جيبياً يبعد بمقدار 15 mm عن مستوي الإسقاط الشاقولي . (شكل ٢٣٩) .

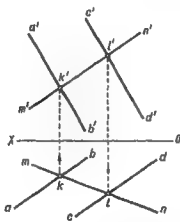
الحل : على بعد 15 mm من خط الأرض نرسم المسقط الأفقي (mn) للمستقيم الجبهي فيقطع المستقيمين ab و cd في النقطتين k و l . بعد ذلك نوجد النقطتين k' و l' على المستقيمين a'b' و c'd' ونمرر منها المسقط الشاقولي (m'n') للمستقيم الجبهي (معطى حل واحد) .



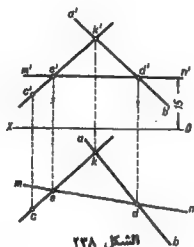
الشكل ٢٢٥



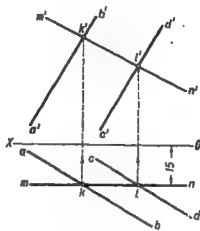
الشكل ٢٢٦



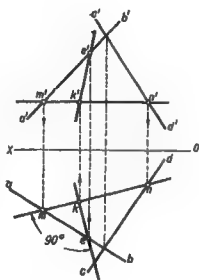
الشكل ٢٢٧



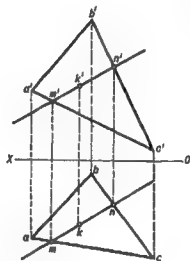
الشكل ٢٣٨



الشكل ٢٣٩



الشكل ٢٤٠



الشكل ٢٤١

● المثال ٥٣ : لدينا مستوي معين بمستقيمين متقاطعين AB و CD ، ارسم في المستوي خط الميل الأعظم (الشكل ٢٤٠) .

الحل : نرمس في المستوي مستقيماً أفقياً $(mn, m'n')$. بما أن خط الميل الأعظم يجب أن يكون عمودياً على هذا المستقيم الأفقي لذلك نرمس مسقطه الأفقي مثلاً (ek) بصورة عمودية على المسقط الأفقي (mn) للمستقيم الأفقي (نظرية إسقاط الزاوية القائمة) ، بعد ذلك نرمس بمساعدة المسقط الأفقي (ek) خط الميل الأعظم مسقطه الشاقولي $(e'k')$.

● المثال ٥٤ : خذ في مستوي المثلث ABC نقطة ما K (الشكل ٢٤١) .

الحل : نرمس في مستوي المثلث مستقيماً مساعداً مثلاً $(mn, m'n')$ ونأخذ عليه نقطة ما (k, k') . إن هذه النقطة تقع في مستوي المثلث .

● المثال ٥٥ : لدينا نقطة K ومستوي معين بنقطة C ومستقيم AB . هل تقع النقطة K في المستوي (الشكل ٢٤٢) ؟

الحل : نمرر من النقطتين k', c' المسقط الشاقولي لمستقيم مساعد فيقطع المستقيم $a'b'$ في النقطة m' . نوجد النقطة m على المستقيم ab ثم نمرر من النقطتين c و m المسقط الأفقي (cm) للمستقيم المساعد . المستقيم $(cm, c'm')$ يقع في المستوي المفروض ، وكما نرى من المخطط النقطة K لا تقع على هذا المستقيم وبناء عليه فالنقطة K لا تقع في المستوي المفروض .

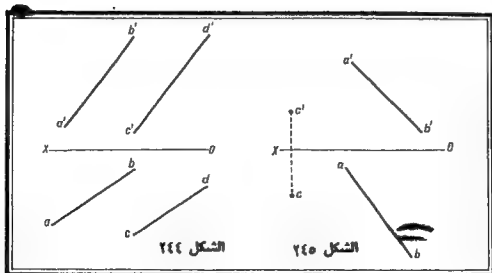
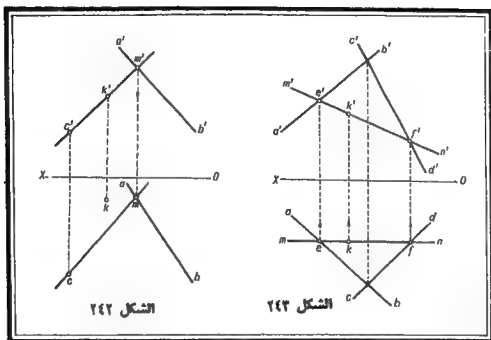
● المثال ٥٦ : لدينا مستوي معطى بمستقيمين متقاطعين AB و CD ، والمسقط الأفقي (k) لنقطة K واقعة في هذا المستوي . أوجد المسقط الشاقولي (k') باستعمال مستقيم جهبي (الشكل ٢٤٣) .

الحل : نمرر من النقطة k المسقط الأفقي (mn) لمستقيم جهبي مساعد فيقطع المستقيمين ab و cd في النقطتين e و f . نوجد النقطتين e' و f' على المستقيمين $a'b'$ و $c'd'$

ونور منها المسقط الشاقولي ($m'n'$) للمستقيم الجبهي. إن المستقيم الجبهي ($mn, m'n'$) يقع في المستوي المفروض فلكي تقع النقطة K في المستوي نأخذ النقطة k' على المستقيم $m'n'$.

مسائل

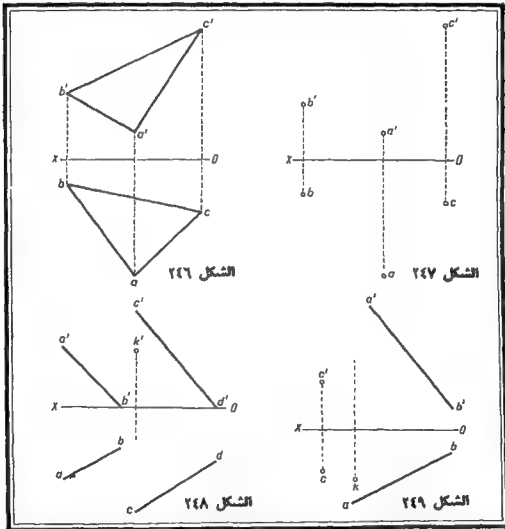
- ١٦٣ - ارسم مستويًا شاقوليًا معينًا :
 - ١ - بمستقيمين متقاطعين .
 - ٢ - بمستقيم ونقطة .
- ١٦٤ - ارسم مستويًا جبهيًا معينًا :
 - ١ - بمستقيمين متوازيين .
 - ٢ - بثلاث نقاط .
- ١٦٥ - ماهي ميزة العناصر الهندسية (على المخطط) الواقعة في مستوي شاقولي ؟
 - ١ - ارسم مستويًا أماميًا معينًا :
 - ١ - بمستقيمين متوازيين .
 - ٢ - بثلاث نقاط .
 - ١٦٧ - ارسم مستويًا أفقيًا معينًا :
 - ١ - بمستقيمين متقاطعين .
 - ٢ - بمستقيم ونقطة .
- ١٦٨ - ماهي ميزة العناصر الهندسية (على المخطط) الواقعة في مستوي أمامي ؟
 - ١ - ارسم مستويًا يوازي خط الأرض معينًا :
 - ١ - بمستقيمين متقاطعين .
 - ٢ - بمستقيمين متوازيين .



٣ - بتسيم ونقطة .

٤ - بثلاث نقاط .

١٧٠ - ماهي ميزة العناصر الهندسية (على الخطط) التي تعين مستوي موازي لخط الأرض ؟



١٧١ - ارمم مستويًا في الوضعية العامة « كَيْفِيًا » معنًى :

١ - بمستقيمين متقاطعين .

٢ - بمستقيمين متوازيين .

٣ - بمستقيم ونقطة .

٤ - بثلاث نقاط .

١٧٢ - ارمم في المستوي المعطى الحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي H بقدر 15 mm (الشكل ٢٤٤ - ٢٤٧) .

١٧٣ - ارمم في المستوي المعطى الحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي V بقدر 15 mm (الشكل ٢٤٤ - ٢٤٧) .

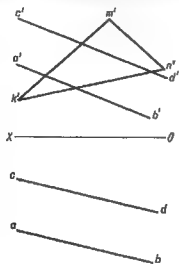
١٧٤ - لدينا المسقط الشاقولي لنقطة واقعة في مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD . أوجد مسقطها الأفقي (الشكل ٢٤٨) .

١٧٥ - لدينا المسقط الأفقي لنقطة واقعة في مستوي معطى بمستقيم AB ونقطة C . أوجد مسقطها الشاقولي (الشكل ٢٤٩) .

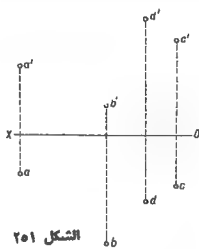
١٧٦ - لدينا المسقط الشاقولي لثلاث KMN واقع في مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD . أوجد المسقط الأفقي (الشكل ٢٥٠) .

١٧٧ - بين هل تقع النقاط الأربعة A, B, C, D في مستوي واحد (الشكل ٢٥١) ؟

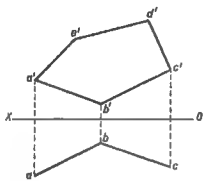
١٧٨ - عين المسقط الأفقي لخمس مستوي $ABCDE$ ، إذا علم مسقطه الشاقولي، والمسقط الأفقي لضلعين متجاورين (الشكل ٢٥٢) .



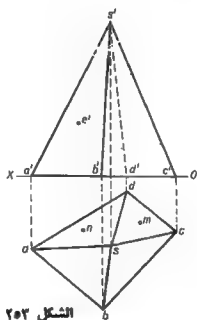
الشكل ٢٥٠



الشكل ٢٥١



الشكل ٢٥٢



الشكل ٢٥٣

١٧٩ - لدينا الهرم SABCD (الشكل ٢٥٣) .

١ - حدد نقطة ما K على وجهه SBC .

٢ - أوجد المسقط الشاقولي (m') للنقطة M الواقعة على الوجه SCD إذا علمت مسقطها الأفقي m .

٣ - أوجد المسقط الأفقي (e) للنقطة E الواقعة على الوجه SAB إذ علمت مسقطها الشاقولي (e') .

٤ - مرر من النقطة N من الوجه SAD خط الميل الأعظم .

البحث الثاني عشر

اعطاء المستوي بآثاره ، المستقيم والنقطة في المستوي

إن المستقيمات التي تعين المستوي يمكن أن تقع في الحالة الخاصة في مستويات الإسقاط نفسها . عندها ندعو هذه المستقيمات بآثار المستوي ، إذ أنه وفق هذه المستقيمات يتقاطع المستوي مع مستويات الإسقاط .

ندعو المستقيم الواقع في المستوي المعطى وفي مستوي الإسقاط الأفقي بالآثر الأفقي للمستوي .

ندعو المستقيم الواقع في المستوي المعطى وفي مستوي الإسقاط الشاقولي بالآثر الشاقولي للمستوي .

ندعو النقطة المشتركة بين الأثرين بنقطة إلتقاء آثري المستوي .

نرمز للمستوي المعين بآثره بالحروف P ، Q ، R ، S ، T الخ .

نرمز للأثر الأفقي للمستوي بالحروف : T_h, S_h, R_h, Q_h, P_h ، الخ .
نرمز للأثر الشاقولي للمستوي بالحروف : T_v, S_v, R_v, Q_v, P_v ، الخ .
نرمز لنقطة إلتقاء الأثرين بالحروف : T_x, S_x, R_x, Q_x, P_x ، الخ .
إن أي نقطة واقعة على الأثر الأفقي أو الشاقولي للمستوي تقع في ذلك المستوي .
يقع المستقيم في المستوي إذا كان أنواه واقعين على أثري المستوي الموافقين .
إن المستقيم الأفقي في المستوي والأثر الأفقي للمستوي متوازيان فيما بينهما ،
وعليه فمساقط المستقيم الأفقي في المستوي توازي المساقط الموافقة للأثر الأفقي للمستوي .
وكذلك المستقيم الجبهي في المستوي والأثر الشاقولي للمستوي متوازيان فيما بينهما وعليه فمساقط المستقيم الجبهي في المستوي توازي المساقط الموافقة للأثر الشاقولي للمستوي .
إن خط الميل الأعظم للمستوي والأثر الأفقي للمستوي متعامدان فيما بينهما .
ومنه فالمسقط الأفقي لخط الميل الأعظم للمستوي عمودي على الأثر الأفقي للمستوي (وبصورة أدق على المسقط الأفقي للأثر الأفقي للمستوي) .

مسائل

١٨٠ - أرسم مستويًا شاقوليًا ما معينًا بأثريه . ماذا تساوي على الخطوط الزاوية بين الأثر الأفقي لهذا المستوي وخط الأرض ؟

١٨١ - ارسم مستويًا جيبًا معينًا بأثره وير من الربع الأول والربع ،
الثاني والثالث .

١٨٢ - ارسم مستويًا أماميًا مامعينًا بأثره . ماذا تساوي على المخطط الزاوية
بين الأثر الشاقولي لهذا المستوي وخط الأرض ؟

١٨٣ - ارسم مستويًا أخفياً معينًا بأثره ، وير من الربع الأول والثاني ،
الثالث والرابع .

١٨٤ - ارسم مستويًا معينًا بأثره يوازي خط الأرض وير من الأرباع : الثاني والأول
والرابع ، الأول والثاني والثالث ، الأول والرابع والثالث ، الثاني
والثالث والرابع .

١٨٥ - ماذا يعني إندماج (على المخطط) أثري مستوي يوازي خط الأرض ؟

١٨٦ - ارسم مستويًا ير من خط الأرض ومن الأرباع : الأول والثالث ،
الثاني والرابع .

١٨٧ - ارسم مستويًا ذو وضعية عامة بحيث يكون : حاداً ، منفرجاً ، أو
ذو أثرين على استقامة واحدة .

١٨٨ - يعطى المستوي الموازي لمستوي الإسقاط الأفقي (أو الشاقولي) بأثر
واحد فقط ، يتنا لايعين المستقيم كما هو معروف مستوي وحيد في الفراغ .

أليس في ذلك تناقض ؟

١٨٩ - ماذا يتطلب أن نضيف عند إعطاء مستوي ير من خط الأرض
بدلالة أثره ؟

١٩٠ - أي المستيمين هما أثران :

١ - لمستوي في الوضع العام (كيني) .

٢ - لمستوي شاقولي .

٣ - لمستوي أمامي .

٤ - لمستوي يوازي خط الأرض .

١٩١ - ماهي على الخط ميزة النقاط ، الخطوط ، المضلعات المستوية الواقعة :

١ - في مستوي شاقولي .

٢ - في مستوي أمامي .

٣ - في مستوي يوازي خط الأرض .

١٩٢ - كيف تتوضع على الخط مسافات المستقيمت الأفقية في مستوي كيني ما معين
بأنثيه ؟ (لماذا ؟)

١٩٣ - كيف تتوضع على الخط مسافات المستقيمت الجبلية في مستوي كيني ما معين
بأنثيه ؟ (لماذا ؟) .

١٩٤ - أي مستقيم يكون أفقياً في مستوي أمامي ؟

١٩٥ - أي مستقيم يكون جيبياً في مستوي شاقولي ؟

١٩٦ - أي مستقيم يكون أفقياً في مستوي يوازي خط الأرض ؟

١٩٧ - أي مستقيم يكون جيبياً في مستوي يوازي خط الأرض ؟

١٩٨ - أي مستقيم يكون ذا ميل أعظمي في مستوي يوازي خط الأرض ؟

أمثلة

• المثال ٥٧ : ارسم أثري مستوي معين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٢٥٤) .

الحل : لنرمز للأثرين بـ p, p_1 فلكي نعين الأثر الشاقولي (p_1) للمستوي يجب
أن نعرف نقطتين من ذلك المستوي واقعتين في مستوي الإسقاط الشاقولي . إحدى
النقطتين (c, c') معطاة أما النقطة الثانية فهي الأثر الشاقولي (v, v') للمستقيم $(ab, a'b')$.
نوجد النقطة (v, v') ثم نرمم مساقط الأثر الشاقولي (p_1) للمستوي : الشاقولي --
عبر النقطتين c' و v' حتى تقاطعه مع خط الأرض في p_1 والأفقي -- عبر النقطتين v, c

المنطقتين مع خط الأرض . النقطة الأولى (p_x) للأثر الأفقي p_h معروفة . نوجد
الأثر الأفقي (h, h') للمستقيم ($ab, a'b'$) فنحصل على النقطة الثانية للأثر
الأفقي للمستوي .

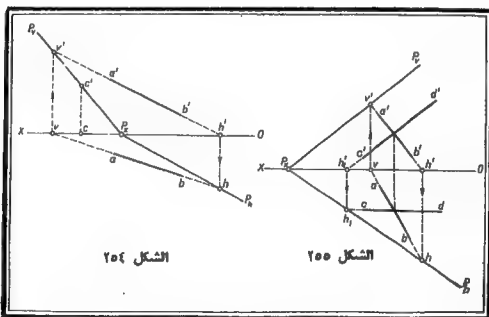
نرسم ماقط الأثر الأفقي (p_h) للمستوي : الأفقي – من التقاطعين p_x, h والشاقولي –
من التقاطعين h', p_x المنطقتين مع خط الأرض .

نتيجة : مع خط الأرض ينطبق دائماً المقط الأفقي للأثر الشاقولي للمستوي
وكذلك المقط الشاقولي للأثر الأفقي للمستوي (لماذا ؟) .

● المثال ٥٨ : ارسم أثري مستوي معطى بـ مستقيمين متقاطعين AB و CD (الشكل ٢٥٥) .

الحل : لنوجد الأثرين (h, h') و (v, v') للمستقيم ($ab, a'b'$) ، والأثر (h_1, h'_1)

للمستقيم ($cd, c'd'$) . نرسم الأثر الأفقي (p_h) للمستوي P – من التقاطعين h, h'
والأثر الشاقولي (p_v) – من النقطة v' وبصورة موازية للمستقيم cd' (لماذا ؟) .
(لماذا ؟) c'



الأثران p_1, p_2 يجب أن يتقاطعا على خط الأرض في النقطة p_x بما يؤكد صحة حل المسألة .

● المثال ٥٩ : ارسم أثري مستوي معطى بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٢٥٦).

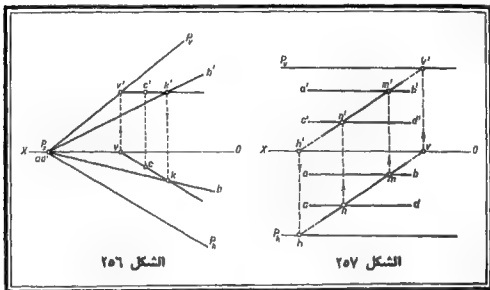
الحل : لنرمز للأثرين بالحرفين p_1 و p_2 . لننتقل من مستوي معطى بمستقيم ونقطة إلى مستوي معطى بمستيمين متقاطعين ، لهذا نرمم من النقطة (c, c') مستقيماً (أفقياً) موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستقيم $(ab, a'b')$ في النقطة (k, k') . إن نقطة تلاقي أثري (p_x) المستوي ستكون النقطة من المستقيم $(ab, a'b')$ الواقعة على خط الأرض (لماذا ؟) . بإيجاد الأثر الشاقولي (v, v') للمستقيم الأفقي ، نرمس الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين v, p_x . أما الأثر الأفقي (p_h) للمستوي فيمر من النقطة p_x بصورة موازية للسقط الأفقي للمستقيم الأفقي .

● المثال ٦٠ : ارسم أثري مستوي معطى بمستيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٢٥٧) .

الحل : المستقيمان AB و CD يعينان مستويًا موازياً لخط الأرض (لماذا ؟) . أثراه p_1 و p_2 يوازيان خط الأرض . لكي نرمس الأثر الأفقي (p_h) يلزمنا فقط نقطة واحدة من المستوي واقعة في مستوي الإسقاط الأفقي . ولكي نرمس الأثر الشاقولي (p_v) يلزمنا فقط نقطة واحدة من المستوي واقعة في مستوي الإسقاط الشاقولي . المستقيمان $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$ لا يمكن أن يقطعا المستويين H و V . لنقطعهما بمستقيم ما مساعد MN ولنوجد أثره .

في الحقيقة النقطتان (h, h') و (v, v') تقعان في المستوي المعطى لأنها موجودتان على مستقيم واقع في المستوي . لنرمس من النقطة v' الأثر الشاقولي

(p_1) للمستوي - بصورة موازية لخط الأرض ، ومن النقطة h - الأثر الأفقي (p_h)
للمستوي - بصورة موازية أيضاً لخط الأرض .



نتيجة : للانتقال من المستوي المعطى بغير أثره (مثلاً بـستقيمين متقاطعين ،
أو متوازيين) إلى مستوي معطى بأثره يجب أن توجد آثار المستقيمين المعطيين
وغور منها أثري المستوي الموافقين .

في تلك الحالات عندما يعطى المستوي بمستقيم ونقطة أو بثلاث نقاط غير
واقعة على مستقيم واحد يجب قبل كل شيء تعيين المستوي بمستقيمين متقاطعين أو
متوازيين بعدها تتبع ما ذكر أعلاه .

● المثال ٦١ : أوجد الأثر الجنبى للمستوي p (الشكل ٢٥٨)

الحل : الأثر الجنبى (p_0) للمستوي يجب أن يمر من الآثر الجنبى للمستقيمين (الأثرين) p_0 و p_1 . المستقيم p_1 ليس له أثر جنبى . نوجد الأثر الجنبى (w) للمستقيم p_1 ثم نرسم الأثر الجنبى (p_0) للمستوي عبر النقطة w موازياً للمحور OZ .

نرمز للنقطة w أيضاً بالحرف (p_1) .

● **المثال ٦٢ :** أوجد الأثر الجنبى للمستوي P (الشكل ٢٥٩ ، ٢٦٠) .

الحل : نوجد الأثرين الجنبين (w) و (w_1) للمستقيمين (للأثرين) p_0 و p_1 ثم نمرر من النقطتين w و w_1 الأثر الجنبى المطلوب (p_0) للمستوي .

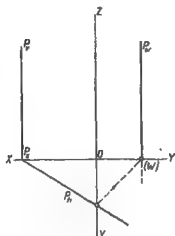
● **المثال ٦٣ :** هل يقع المستقيم AB في المستوي P (الشكل ٢٦١) ؟

الحل : نرسم أثري المستقيم AB : الأفقى (h, h') والشافوي (v, v') .
إن أثري المستقيم المعطى ($ab, a'b'$) يقعان على أثري المستوي الموافقين بناء عليه ،
فالمستقيم AB يقع في المستوي (حسب النظرية) .

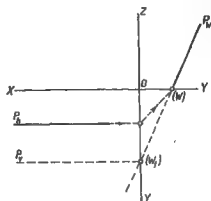
● **المثال ٦٤ :** هل يقع المستقيم AB في المستوي P (الشكل ٢٦٢) ؟

الحل : المستقيم ($ab, a'b'$) أثر وحيد جنبى . لنرسم أثر المستقيم والأثر الجنبى للمستوي . الأثر الجنبى (w) للمستقيم يقع على الأثر الجنبى (p_0) للمستوي . بناء عليه فالمستقيم AB يقع في المستوي P .
نتبين أدناه حل هذه المسألة دون الاستعانة بمستوي الاسقاط الجنبى .

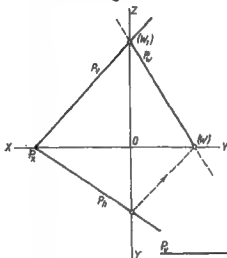
● **المثال ٦٥ :** ارسم أثري المستوي P مستقيماً ما يمر من الربع الثاني والاول والرابع (الشكل ٢٦٣) .



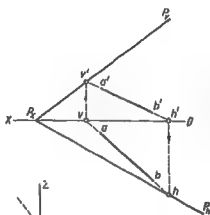
الشكل ٢٥٨



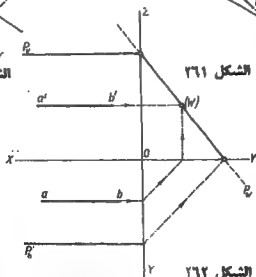
الشكل ٢٥٩



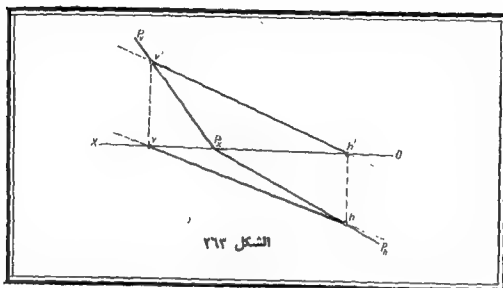
الشكل ٢٦٠



الشكل ٢٦١



الشكل ٢٦٢



الحل : من المعلوم أن أثري المستقيم المطلوب يجب أن يتعا على الأثرين الموافقين للمستوي المروض . إن أي مستقيم يمر من الربع الثاني والأول والربع له أثر أفقي في الحقل الأمامي من مستوي الاسقاط الأفقي ، وله أثر شاقولي في الحقل العلوي من مستوي الاسقاط الشاقولي وهما يتوضعان على الشطط بالشكل التالي : الشاقولي - فوق خط الأرض ، الأفقي - تحت خط الأرض

لنأخذ بصورة اختيارية على الأثر الأفقي (p_x) للمستوي نقطة الأثر (h, h') وعلى الأثر الشاقولي (p_y) نقطة الأثر (v, v') ثم نرسم مسطحي المستقيم المطلوب :
الأفقي - عبر النقطتين h و v والشاقولي - عبر النقطتين h' و v' .

● المثال ٦٦: ارسم في المستوي π مستقيماً ما ماراً من الربع الثالث والرابع (الشكل ٣٦٤).

الحل : المستقيم المار من الربع الثالث والرابع أثر وحيد شاقولي في الحقل السفلي من مستوي الاسقاط الشاقولي . وهو يتوضع على المخطط تحت سطح الأرض . لناخذ على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي نقطة (v, v') ولنرسم منها مسطوي المستقيم المطلوب (الأفقي) : الشاقولي - عبر النقطة v' موازياً لخط الأرض والأفقي - عبر النقطة v موازياً للأثر الأفقي (p_h) للمستوي .

● **المثال ٦٧ :** ارسم في المستوي P مستقيماً ماراً من الربع الثاني والثالث (الشكل ٢٦٥) .

الحل : المستقيم المار من الربع الثاني والثالث أثر وحيد أفقي في الحقل الخلفي من مستوي الاسقاط الأفقي ، وهو يتوضع على المخطط فوق خط الأرض . لناخذ على امتداد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي نقطة (h, h') ولنرسم منها مسطوي المستقيم المطلوب (الجسمي) : الأفقي - عبر النقطة h موازياً لخط الأرض ، والشاقولي - عبر النقطة h' موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي .

● **المثال ٦٨ :** ارسم في المستوي P مستقيماً يوازي خط الأرض ويقع في الربع الثالث (الشكل ٢٦٦) .

الحل : إن المسقط الجنبى للمستقيم المطلوب هو بشكل نقطة ويجب أن يقع على الأثر الجنبى المستوي المعطى . لنشئ الأثر الجنبى (p_w) للمستوي ، ولناخذ عليه نقطة ما ولنرمز لها بـ $m'n'$. بمعرفة المسقط الجنبى $(m'n')$ للمستقيم نرمس مسطويه الأفقي (mn) والشاقولي $(m'n')$ - حسب القاعدة العامة .

● **المثال ٦٩ :** لدينا مستوي P ونقطة A . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٦٧) ؟

الحل : المسقط الأفقي لأي نقطة من المستوي الشاقولي كما هو معروف تقع على الأثر الأفقي للمستوي . في الحالة المعطاة المسقط الأفقي (a) للنقطة يقع

على امتداد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . بناء عليه فالنقطة المعطاة (a, a') تقع في المستوي P .

● المثال ٧٠ : لدينا نقطة A ومستوي P . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٦٨) ؟

الحل : المسقط الشاقولي لأي نقطة من المستوي الأمامي كما هو معروف يقع على الأثر الشاقولي للمستوي . في الحالة المعطاة المسقط الشاقولي (a') للنقطة لا يقع على الأثر الشاقولي (p_h) للمستوي . بناء عليه فالنقطة المعطاة (a, a') لا تقع في المستوي P .

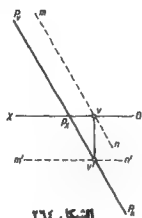
● المثال ٧١ : لدينا مستوي P ونقطة A . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٦٩ - ٢) ؟

الحل : بما أن المستوي ذو وضعية عامة لذلك نستعمل مستقيماً مساعداً .

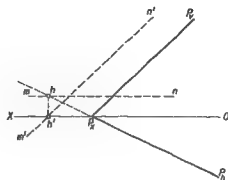
١ - نرسم من المسقط الشاقولي (a') للنقطة مسقطاً شاقولياً ما $(h'v')$ لمستقيم مساعد ، ثم بمساعدة $h'v'$ نوجد المسقط الأفقي (hv) للمستقيم المساعد . المسقط الأفقي (a) للنقطة لا يقع على المستقيم hv . بناء عليه فالنقطة المعطاة (a, a') لا تقع في المستوي P .

يمكن أن نبدأ حل المسألة كذلك يرسم المسقط الأفقي (hv) للمستقيم المساعد عبر المسقط الأفقي (a) للنقطة . الخ .

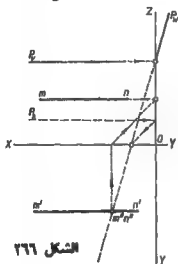
٢ - الحل بمساعدة مستقيم أفقي : نمرر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة المسقط الشاقولي لمستقيم أفقي - بصورة موازية لخط الأرض حتى يقطع الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي في النقطة v' . بمساعدة v' نوجد على خط الأرض النقطة v ، ونرسم منها المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي - بصورة موازية للأثر الأفقي (p_h) للمستوي . النقطة (a, a') لا تقع على المستقيم الأفقي في المستوي . بناء عليه فالنقطة المفروضة (a, a') لا تقع في المستوي P



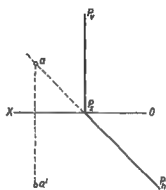
الشكل ٢٦٤



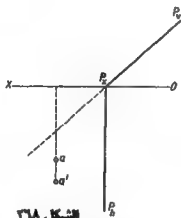
الشكل ٢٦٥



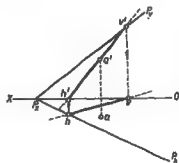
الشكل ٢٦٦



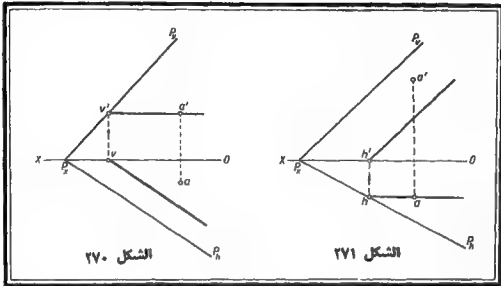
الشكل ٢٦٧



الشكل ٢٦٨



الشكل ٢٦٩



يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي من المسقط الأفقي (a) للنقطة - بصورة موازية للأثر الأفقي للمستوي الخ .

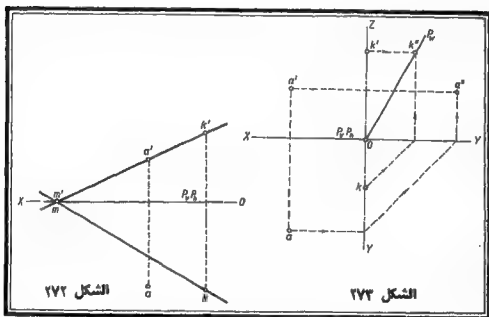
٣- الحل بمساعدة مستقيم جبهي : نرسم من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي موازياً لخط الأرض فيقطع الأثر الأفقي (p_h) للمستوي في النقطة h . بمساعدة النقطة h نوجد على خط الأرض النقطة h' ثم نمرر منها المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . إن النقطة (a, a') لا تقع على المستقيم الجبهي في المستوي . بناء عليه فالنقطة (a, a') لا تقع في المستوي P .

يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي من المسقط الشاقولي (a') للنقطة - موازياً للأثر الشاقولي للمستوي - الخ .

● المثال ٧٢ : لدينا مستوي P ونقطة A . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٧٢ و ٢٧٣) ؟

الحل: نستعمل مستقيماً مساعداً $(mk, m'k')$ واقعاً في المستوي P .
نمر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة المسقط الشاقولي للمستقيم المساعد ماراً
من النقطة k' ، فيقطع خط الأرض في النقطة (m, m') . من النقطتين k و m
نرسم المسقط الأفقي للمستقيم المساعد. إن النقطة (a, a') لا تقع على المستقيم المساعد
 $(mk, m'k')$ ، بناء عليه فالنقطة (a, a') لا تقع في المستوي P .

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقة ثانية . المسقط الجنبى لأي نقطة من مستوي
موازي لخط الأرض كما هو معروف يقع على الأثر الجنبى للمستوي . نعين الأثر الجنبى
 (p_0) للمستوي والمسقط الجنبى (a'') للنقطة . بالتالى نستنتج ان النقطة (a, a') لا تقع
في المستوي P .



● المثال ٧٣ : لدينا مستوي P ومستقيم MN .

هل يقع المستقيم في المستوي (الشكل ٢٧٤) ؟

الحل : نحل هذه المسألة بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبى . لناخذ على المسقط الشاقولي $(m'n')$ للمستقيم نقطة ما (a') ولنرسم منها المسقط الشاقولي $(h'v')$ لمستقيم مساعد واقع في المستوي P . بمساعدة المسقط $(h'v')$ نوجد المسقط الأفقي (hv) للمستقيم ومن ثم a' للنقطة a .

النقطة (a, a') تقع على المستقيم $(hv, h'v')$ كذلك المستقيم $(mn, m'n')$ يمر من النقطة (a, a') الواقعة في المستوي P ، لهذا فهو يقع في هذا المستوي .

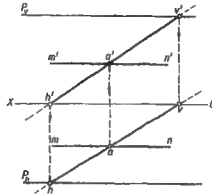
● المثال ٧٤ : لدينا مستوي P والمسقط الأفقي (a) للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الشاقولي a' (الشكل ٢٧٥) .

الحل : بما أن المستوي المعطى كئيفي لذلك نستعمل مستقيماً مساعداً ما (مثلاً أفقياً) . لنرسم من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي لمستقيم أفقي موازياً للأثر الأفقي (p_h) للمستوي ، فيقطع خط الأرض في النقطة v . بمساعدة النقطة v نوجد النقطة v' على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي ، ونمرر منها المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي موازياً لخط الأرض .

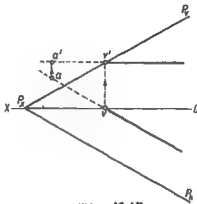
بواسطة النقطة (a) نوجد النقطة (a') على المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي . في حالة إعطاء المسقط الشاقولي لنقطة يبدأ حل المسألة برسم المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي من المسقط الشاقولي للنقطة موازياً لخط الأرض النح .

● المثال ٧٥ : لدينا مستوي P والمسقط الشاقولي (a') للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الأفقي a (الشكل ٢٧٦) .

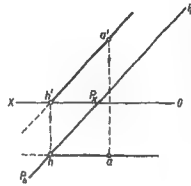
الحل : نحل المسألة بمساعدة مستقيم جبهى . نرمس من المسقط الشاقولي (a') لنقطة



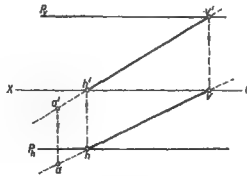
الشكل ٢٧٤



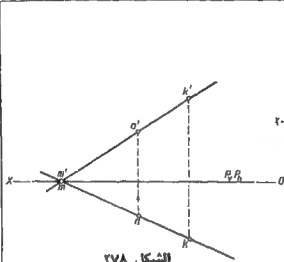
الشكل ٢٧٥



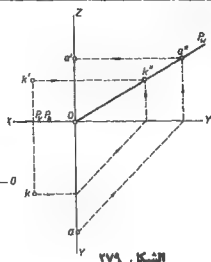
الشكل ٢٧٦



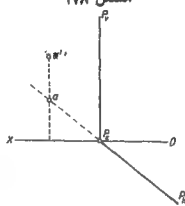
الشكل ٢٧٧



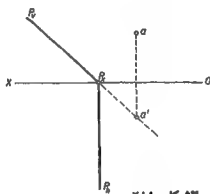
الشكل ٢٧٨



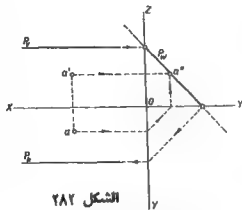
الشكل ٢٧٩



الشكل ٢٨٠



الشكل ٢٨١



الشكل ٢٨٢

المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي - موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي فيقطع خط الأرض في النقطة h' . بمساعدة النقطة h' نوجد على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي النقطة h التي نرمم منها المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي - موازياً لخط الأرض . بمساعدة النقطة a' نوجد النقطة a على المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي .

في حالة إعطاء المسقط الأفقي للنقطة نبدأ حل المسألة برسم المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي من المسقط الأفقي للنقطة موازياً لخط الأرض النخ .

● المثال ٧٦ : لدينا مستوي P والمسقط الشاقولي (a') للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الأفقي a (الشكل ٢٧٧) .

الحل : نمر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة المسقط الشاقولي ($h'v'$) للمستقيم المساعد في المستوي P . بواسطة $h'v'$ نوجد المسقط الأفقي (hv) للمستقيم وعليه نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة بمساعدة النقطة a' .

يمكن حل هذه المسألة بطريقة أخرى . من المعروف أن المسقط الجبهي (a'') للنقطة يجب أن يقع على الأثر الجبهي (p_v) للمستوي . بمعرفة (p_v) للمستوي وبمساعدة المسقط الشاقولي (a') للنقطة نوجد المسقط الجبهي (a'') للنقطة . بعد ذلك حسب القاعدة العامة وبمساعدة a' و a'' نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة (يجب إنجاز المخطط من قبل الطالب) .

● المثال ٧٧ : لدينا مستوي P والمسقط الأفقي (a) للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الشاقولي a' (الشكل ٢٧٨ ، ٢٧٩) .

الحل : نمر من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي (ak) . مستقيم مساعد ، فيقطع خط الأرض في النقطة (m, m') . بواسطة المسقط الأفقي (km) للمستقيم

نوجد مسقطه الشاقولي ($k'm'$) وعليه نوجد المسقط الشاقولي المنشود (a') للنقطة .

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقة ثانية . بما أن المسقط الجنبى (a'') للنقطة يجب أن يقع على الأثر الجنبى (p_w) للمستوي ، لذا نوجد هذا الأثر ومن ثم المسقط الجنبى (a'') للنقطة ، بعد ذلك نوجد المسقط الشاقولي المطلوب (a') للنقطة .

● **المثال ٧٨ :** لدينا الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي (الشكل ٢٨٠) .

الحل : إن الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي عمودي على خط الأرض ، بناء عليه فالمستوي نفسه شاقولي . بما أن النقطة المعطاة (a, a') تقع في المستوي P لذلك نرسم الأثر الأفقي (p_h) للمستوي من المسقط الأفقي (a) للنقطة والنقطة p_v .

● **المثال ٧٩ :** لدينا الأثر الأفقي (p_h) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي (الشكل ٢٨١) .

الحل : إن الأثر الأفقي (p_h) للمستوي عمودي على خط الأرض ، بناء عليه فالمستوي نفسه أمامي . بما أن النقطة المعطاة (a, a') تقع في المستوي P لذلك نرسم الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من المسقط الشاقولي (a') للنقطة والنقطة p_h .

● **المثال ٨٠ :** لدينا الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي (الشكل ٢٨٢ ، ٢٨٣) .

الحل : إن الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي يوازي خط الأرض ، بناء عليه فالمستوي نفسه يوازي خط الأرض . بما أن النقطة المفروضة (a, a') تقع في المستوي P لذلك فمسقطها الجنبى (a'') يجب أن يقع على الأثر الجنبى (p_w) للمستوي .

نمر الاثر الجنبى (p_w) للمستوى من الاثر الجنبى للمستقيم p_v والمقط الجنبى (a'') للنقطة المفروضة . بمعرفة الاثر p_h للمستوى نرسم الاثر الأفقى (p_h) للمستوى من المقط الأفقى للاثر الجنبى موازياً لخط الأرض .

يمكن حل هذه المسألة بدون استعمال مستوى الإسقاط الجنبى ، ولكن فى هذه الحالة يستعمل مستقيم مساعد . نرسم فى المستوى P من المقط الشاقولى (a') للنقطة المقط الشاقولى ($h'v'$) للمستقيم المساعد . بمساعدة المقط الشاقولى ($h'v'$) للمستقيم نوجد مسقطه الأفقى (hv) ونرسم الاثر الأفقى (p_h) للمستوى من الاثر الأفقى للمستقيم - موازياً لخط الأرض .

● المثال ٨١ : لدينا الاثر الأفقى (p_h) للمستوى P والنقطة A الواقعة فى هذا المستوى . أوجد الاثر الشاقولى (p_v) للمستوى (الشكل ٢٨٤ - ٢٨٦) .

الحل : بما أن المستوى كئيفى لذا نستعمل مستقيم مساعد .

١ - نرسم فى المستوى P ومن المقط الأفقى (a) للنقطة المقط الأفقى (hv) لمستقيم مساعد ، ومن ثم نوجد مسقطه الشاقولى ($h'v'$) . بعد ذلك نرسم الاثر الشاقولى (p_v) للمستوى من النقطتين v و p_x .

يمكن حل هذه المسألة بصورة أسهل بمساعدة المستقيمت الرئيسة فى المستوى - الأفقية أو الجنبية .

٢ - نرسم مفاصل المستقيم الأفقى فى المستوى من مفاصل النقطة (a, a') : الأفقى - من النقطة a - موازياً للاثر الأفقى (p_h) للمستوى ، الشاقولى - من النقطة a' - موازياً لخط الأرض . بإيجاد الاثر (v, v') للمستقيم الأفقى فى المستوى نرسم الاثر الشاقولى (p_v) من النقطتين v, v' .

٢- نرمم من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي المستقيم الجبهي (كيف؟) -
 فيقطع الأثر الأفقي (p_h) للمستوي في النقطة h . بإيجاد النقطة h' على خط الأرض
 نرمم من a', h' المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي كما نرمم بصورة موازية له الأثر الشاقولي
 (p_v) للمستوي من النقطة p_x .

● المثال ٨٢ : لدينا الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P ونقطة A واقعة في هذا
 المستوي . أوجد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي (الشكل ٢٨٧ ، ٢٨٨) .

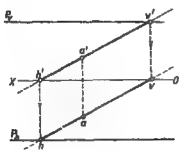
الحل : ١- نمر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة المسقط الشاقولي لمستقيم أفقي
 في المستوي P - موازياً لخط الأرض فيقطع الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي في النقطة v' .
 بإيجاد النقطة v على خط الأرض نمر من النقطة a و v المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي
 في المستوي وبصورة موازية له الأثر الأفقي المطلوب (p_h) للمستوي من النقطة p_x .

٢- نمر من مساقط النقطة (a, a') مساقط مستقيم جبهي في المستوي :
 الشاقولي - من النقطة a' موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي ، الأفقي - من النقطة a
 موازياً لخط الأرض . بإيجاد الأثر الأفقي (h, h') للمستقيم الجبهي نرمم الأثر الأفقي
 المطلوب (p_h) للمستوي من النقطتين h و p_x .

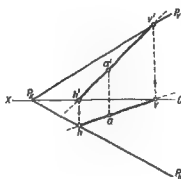
● المثال ٨٣ : لدينا نقطة A واقعة في المستوي الشاقولي P ونقطة لالتقاء أثري
 المستوي (p_x) . أرمم أثري المستوي . (الشكل ٢٨٩) .

الحل : بما أن المستوي المطلوب شاقولي ، فالمسقط الأفقي (a) للنقطة A يجب
 أن يقع على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . الأثر الشاقولي (p_v) يجب أن يكون
 عمودياً على خط الأرض . نرمم أثري المستوي : الأفقي (p_h) - من النقطتين p_x و a ،
 والشاقولي (p_v) - من النقطة p_x عمودياً على خط الأرض .

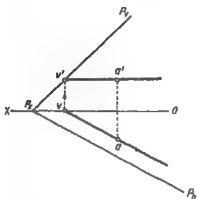
نتيجة : إذا كان المستوي الشاقولي يمر من نقطة ما ، فالأثر الأفقي لهذا المستوي



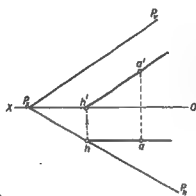
الشكل ٢٨٣



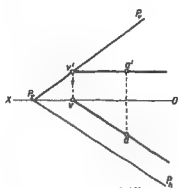
الشكل ٢٨٤



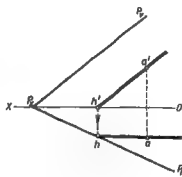
الشكل ٢٨٥



الشكل ٢٨٦



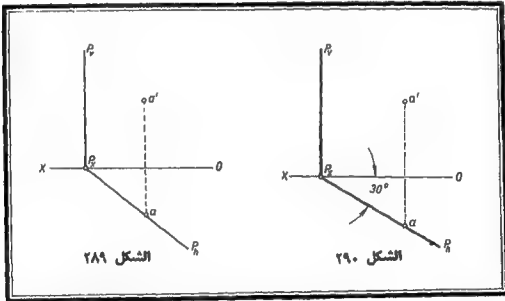
الشكل ٢٨٧



الشكل ٢٨٨

سيمر من المقط الأفقي لهذه النقطة .

- المثال ٨٤ : لدينا نقطة A . مرور منها مستويًا P عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي ويصنع مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 30° (الشكل ٢٩٠) .
- الحل : تعيين الزاوية الكائنة بين المستوي الشاقولي ومستوي الإسقاط الشاقولي بالزاوية بين الأثر الأفقي للمستوي وخط الأرض . ومنه نرسم من المقط الأفقي (a) للنقطة الأثر الأفقي (p_a) للمستوي صانعا زاوية 30° مع خط الأرض فيقطع في النقطة p_x بعد ذلك نرسم من النقطة p_x الأثر الشاقولي (p_r) للمستوي عمودياً على خط الأرض (معطى حل واحد) .



- المثال ٨٥ : مرور من النقطة A مستويًا P عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٢٩١) .

الحل : بما أن النقطة (a, a') يجب أن تقع في المستوى الأمامي فكما هو معروف مسقطها الشاقولي يجب أن يقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي عدا عن ذلك الأثر الأفقي (p_h) يجب أن يكون عمودياً على خط الأرض . من النقطة يمكن رسم مستويات كثيرة ، لذلك نأخذ نقطة ما على خط الأرض p_x ونوسم منها أثري المستوي : الشاقولي (p_v) - من القطعتين a' و p_x والأفقي (p_h) - من النقطة p_x عمودياً على خط الأرض .

نتيجة : إذا كان المستوي أمامياً ويمر من نقطة فالأثر الشاقولي لهذا المستوي سيمر من المسقط الشاقولي للنقطة .

● **المثال ٨٦ :** لدينا نقطة A . مرر منها مستويًا P عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي وبشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 60° (الشكل ٢٩٢) .

الحل : إن الزاوية الكائنة بين المستوي الأمامي ومستوي الإسقاط الأفقي تعين بالزاوية بين الأثر الشاقولي للمستوي وخط الأرض .

لذلك نمرر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي صانعاً مع خط الأرض زاوية 60° يقطعه بالنقطة p_x . بعد ذلك نمرر من النقطة p_x الأثر الأفقي (p_h) للمستوي عمودياً على خط الأرض (معطى حل واحد) .

● **المثال ٨٧ :** مرر من النقطة A مستويًا P موازياً لخط الأرض ماراً من الربع الأول والثاني والثالث (الشكل ٢٩٣) .

الحل : بما أن المستوي P يوازي خط الأرض ، فإن الأثر الشاقولي للمستوي يمر من المسقط الجانبي (a'') للنقطة المفروضة . إن أثري المستوي يجب أن يكونا موازيين لخط الأرض . إن لأي مستوي من المستويات

والثالث أثر أفقي (p_h) واقع في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي وأثر شاقولي (p_v) في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي وكلاهما يتوضعان على المخطط فوق خط الأرض. لنوجد المسقط الجنبى (a'') للنقطة المفروضة ولنمررها بصورة كيفية الأثر الجنبى (p_w) للمستوي فيقطع المحورين oz و oy في النقطتين w (الأثر الجنبى للمستقيم p_h) و w_1 (الأثر الجنبى للمستقيم p_v) بعد ذلك نعين p_h و p_v (انظر المخطط) .

ملاحظة : فيما يلي نبين كيف نرسم من نقطة مستوياً ذو وضعية عامة (كفيماً) .

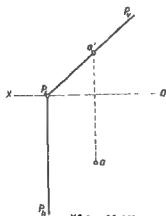
● **المثال ٨٨ :** ضم المستقيم AB في مستوي شاقولي P (الشكل ٢٩٤) .

الحل : من المعروف أن المسقط الأفقي لمستقيم ما واقع في مستوي شاقولي ينطبق على الأثر الأفقي للمستوي ، وبالعكس : الأثر الأفقي (p_h) للمستوي الحاوي على مستقيم ما ينطبق على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم المفروض .

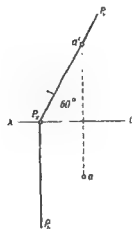
ومنه - نحدد المسقط الأفقي (ab) للمستقيم حتى يتقاطع مع خط الأرض في النقطة p_x ، ثم نمررها منها الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي - بصورة عمودية على خط الأرض .

● **المثال ٨٩ :** ضم المستقيم AB في مستوي أمامي P (الشكل ٢٩٥) .

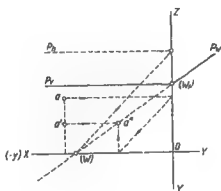
الحل : من المعلوم أن المسقط الشاقولي لمستقيم ما واقع في مستوي أمامي ينطبق على الأثر الشاقولي للمستوي ، وبالعكس : الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي الحاوي على مستقيم ما سوف ينطبق على المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم المفروض. لذلك نحدد المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم حتى يتقاطع مع خط الأرض في النقطة p_x ، ثم نرسم منها الأثر الأفقي (p_h) للمستوي - عمودياً على خط الأرض .



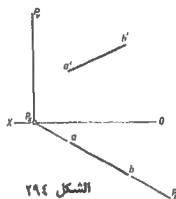
الشكل ٢٩١



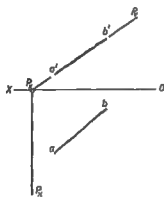
الشكل ٢٩٢



الشكل ٢٩٣



الشكل ٢٩٤



الشكل ٢٩٥

٦٣١

نتيجة : من مستقيم ما يمكن أن نمر : مستوي شاقولي وحيد ، مستوي أمامي وحيد ، مستوي وحيد يوازي خط الأرض (لماذا ؟) .

● **المثال ٩١ :** ضم المستقيم AB في المستوي P الكيفي إذا علمت نقطة إلتقاء أثري المستوي p_x (الشكل ٢٩٧) .

الحل : من المعروف أن أثري المستقيم الواقع في المستوي يتوضعان على أثري المستوي ، وعلى العكس أثرا المستوي الحاوي على مستقيم يجب أن يرا من الأثرين الموازيين للمستقيم .

لنوجد الأثر (v, v') للمستقيم ثم نرمس الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين p_x و v' والأثر الأفقي (p_h) للمستوي من النقطة p_x - موازياً للمسط الأفقي (ab) للمستقيم (لماذا ؟) .

● **المثال ٩٢ :** ضم المستقيم AB في مستوي كيفي P (الشكل ٢٩٨) .

الحل : نوجد الأثر (h, h') للمستقيم ونأخذ على خط الأرض نقطة ما (لماذا ؟) p_x ثم نرمس أثري المستوي : الأفقي (p_h) - من النقطة p_x و h والشاقولي (p_v) - من النقطة p_x - موازياً للمسط الشاقولي $(a'b')$ للمستقيم (لماذا ؟) .

● **المثال ٩٣ :** ارسم أثري مستوي كيفي P يمر من النقطة A إذا علمت نقطة إلتقاء أثري ذلك المستوي p_x (الشكل ٢٩٩ و ٣٠٠) .

الحل : ١ - باستعمال مستقيم أفقي في المستوي . نرمس مسطبي مستقيم أفقي ما من مسطبي النقطة (a, a') ، ثم نوجد أثره (v, v') . نرمس الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين p_x و v' ، والأثر الأفقي (p_h) - من النقطة p_x - موازياً للمسط الأفقي للمستقيم الأفقي (لماذا ؟) .

٢ - باستعمال مستقيم جيهي في المستوي . نرمس مسقطي مستقيم جيهي ما من مسقطي النقطة المعطاة (a, a') ، ثم نوجد الأثر (h, h') . نرمس الأثر الأفقي (p_h) للمستوي من التقطعين h و p_h والأثر الشاقولي (p_v) - من النقطة p_x - موازياً للمقط الشاقولي للمستقيم الجيهي (لماذا ؟) .

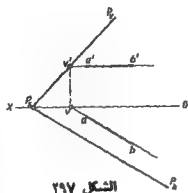
ملاحظة : يمكننا أن نمرر أي مستقيم من النقطة A .

● المثال ٩٤ : ارسم أثري مستوي كيفي P ير من النقطة A (الشكل ٣٠١ - ٣٠٣) .

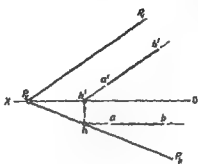
الحل : ١ - نرمس مسقطي مستقيم ما من مسقطي النقطة (a, a') ثم نوجد أثريه (h, h') و (v, v') بما أنه يمكن من مستقيم أن نمرر عدة مستويات لذلك نأخذ على خط الأرض نقطة ما p_x ثم نرمس أثري المستوي : الأفقي (p_h) - من التقطعين p_x و h والشاقولي (p_v) - من التقطعين p_x و v' .

٢ - نعمل مستقيماً أفقياً في المستوي . نرمس مسقطي مستقيم أفقي ما من مسقطي النقطة (a, a') ثم نوجد الأثر (v, v') . نأخذ على خط الأرض نقطة ما p_x ونرمس أثري المستوي : الشاقولي (p_v) - من التقطعين p_x و v' والأفقي (p_h) - من النقطة p_x - موازياً للمقط الأفقي للمستقيم الأفقي (لماذا ؟) .

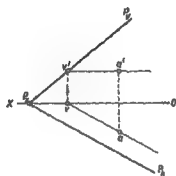
٣ - نعمل مستقيماً جيهياً في المستوي . نرمس مسقطي مستقيم جيهي ما من مسقطي النقطة (a, a') ثم نوجد الأثر (h, h') . نأخذ على خط الأرض نقطة ما p_x ونرمس أثري المستوي : الأفقي (p_h) من التقطعين p_x و h والشاقولي



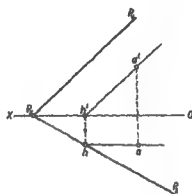
الشكل ٢٩٧



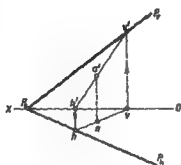
الشكل ٢٩٨



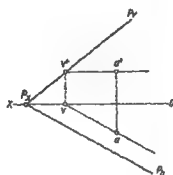
الشكل ٢٩٩



الشكل ٣٠٠

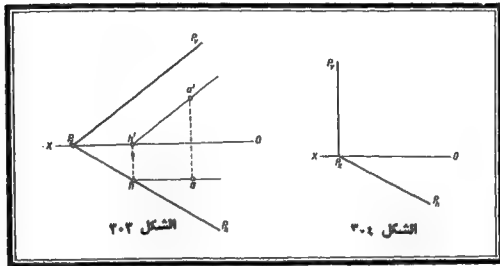


الشكل ٣٠١



الشكل ٣٠٢

P_1 - من النقطة p_x - موازياً للمقط الشاقولي للمستقيم الجببي (لماذا ؟) .



مسائل

١٩٩ - عدد المستقيمت التي يمكن رسمها في مستوي P (الشكل ٣٠٤ - ٣١١) .

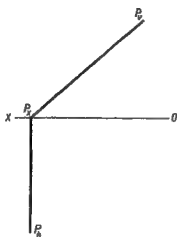
٢٠٠ - أوجد أنري مستوي مفروض معين : بستمين متقاطعين ، بستمين

متوازيين ، بستم ونقطة (الشكل ٣١٢ - ٣١٧) .

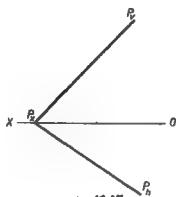
٢٠١ - أوجد الأثر الجببي للمستوي P (الشكل ٣١٨ - ٣٢٧) .

٢٠٢ - ارسم في المستوي P مستقيماً ما ير من الأرباع المينة

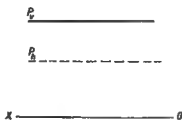
(الشكل ٣٢٨ - ٣٣٢) .



الشكل ٢٠٥



الشكل ٢٠٨



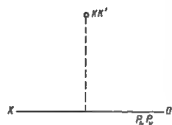
الشكل ٢١٠



الشكل ٢٠٦



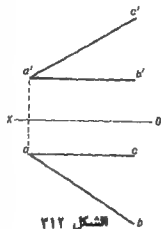
الشكل ٢٠٧



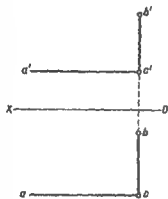
الشكل ٢٠٩



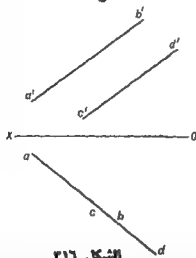
الشكل ٢١١



الشكل ٢١٢



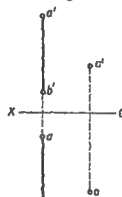
الشكل ٢١٤



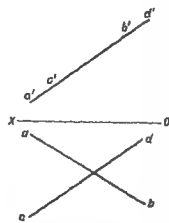
الشكل ٢١٦



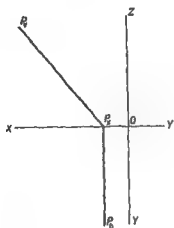
الشكل ٢١٣



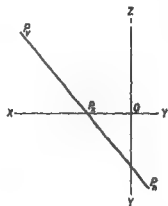
الشكل ٢١٥



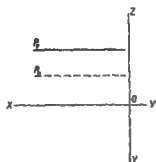
الشكل ٢١٧



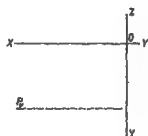
الشكل ٣١٨



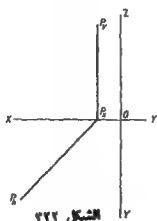
الشكل ٣١٩



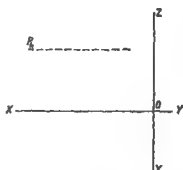
الشكل ٣٢٠



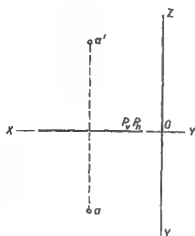
الشكل ٣٢١



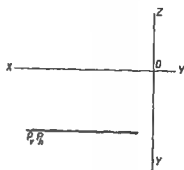
الشكل ٣٢٢



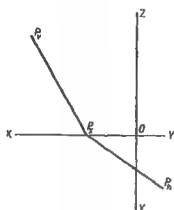
الشكل ٣٢٣



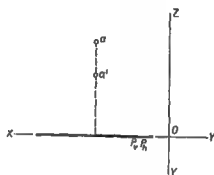
الشكل ٣٢٤



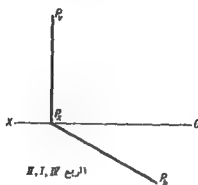
الشكل ٣٢٥



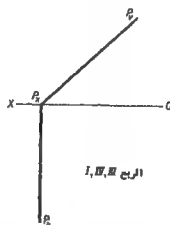
الشكل ٣٢٦



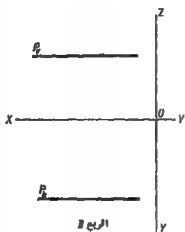
الشكل ٣٢٧



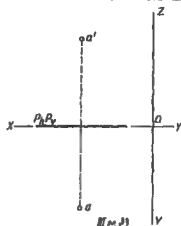
الشكل ٣٢٨



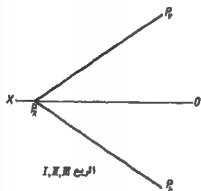
الشكل ٣٢٩



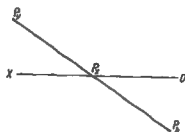
الشكل ٢٢٠



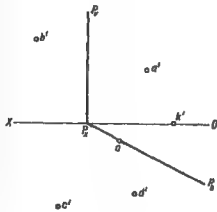
الشكل ٢٢١



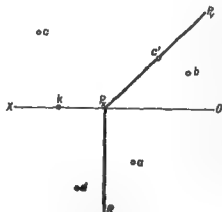
الشكل ٢٢٢



الشكل ٢٢٣



الشكل ٢٢٤



الشكل ٢٢٥

٢٠٣ - ارسم في المستوي P المثل الهندسي للنقاط التي تبعد عن مستوي الإسقاط الأفقي بمقدار 15 mm (الشكل ٣٣٢ و ٣٣٣) .

٢٠٤ - ارسم في المستوي P المثل الهندسي للنقاط التي تبعد عن مستوي الإسقاط الشاقولي بمقدار 15 mm (الشكل ٣٣٢ و ٣٣٣) .

٢٠٥ - أوجد في المستوي P نقطة A ذات إحداثيات مقروضة (الشكل ٣٣٢ و ٣٣٣).

y	15	-15	-20	-15	25	20
x	25	25	20	-25	-15	-20

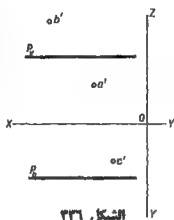
٢٠٦ - عيّن المساط الناقصة للنقاط الواقعة في المستوي P (الشكل ٣٣٤ - ٣٤١) .

٢٠٧ - لدينا المسقط الأفقي للمثلث ABC الواقع في المستوي P . عيّن مسقطه الشاقولي (أو بالعكس) ، بدون استعمال مستقيمت رئيسية في المستوي ، وباستعمال مستقيمت أفقية وجمعية في المستوي (الشكل ٣٤٢ و ٣٤٣) .

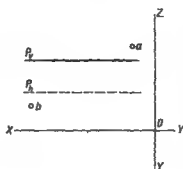
٢٠٨ - لدينا أحد مسطحي المثلث ABC الواقع في المستوي الموازي لخط الأرض . عيّن مسقطه الآخر : بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبى ، باستعمال مستوي الإسقاط الجنبى (الشكل ٣٤٤ و ٣٤٥) .

٢٠٩ - عيّن الأثر الناقص للمستوي P المعطى بأثر واحد ونقطة واقعة في هذا المستوي . (الشكل ٣٤٦ - ٣٥٥) .

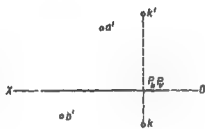
٢١٠ - ارسم أثري المستوي P المار من النقطة A إذا علمت نقطة التقاء هذين الاثرين وأن المستوي :



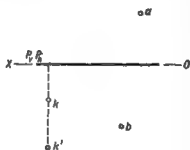
الشكل ٢٣٦



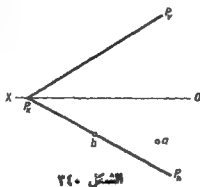
الشكل ٢٣٧



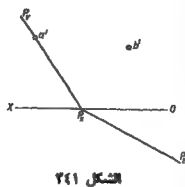
الشكل ٢٣٨



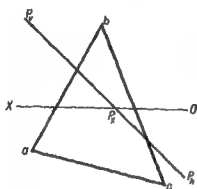
الشكل ٢٣٩



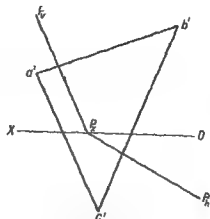
الشكل ٢٤٠



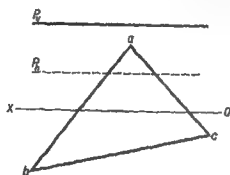
الشكل ٢٤١



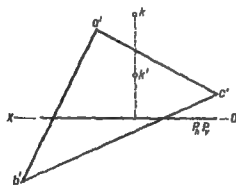
الشكل ٣٤٢



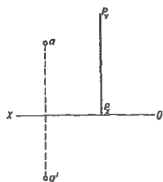
الشكل ٣٤٣



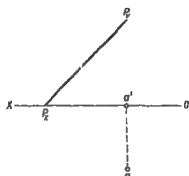
الشكل ٣٤٤



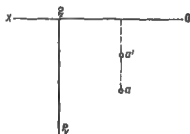
الشكل ٣٤٥



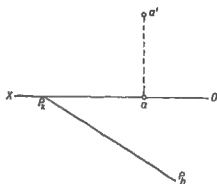
الشكل ٢٤٦



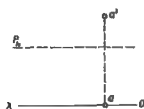
الشكل ٢٤٧



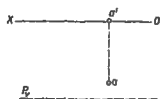
الشكل ٢٤٨



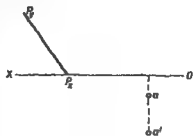
الشكل ٢٤٩



الشكل ٢٥٠



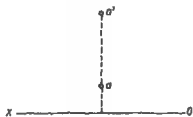
الشكل ٢٥١



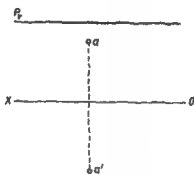
الشكل ٢٥٢



الشكل ٢٥٣



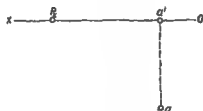
الشكل ٢٥٤



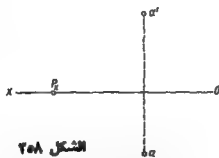
الشكل ٢٥٥



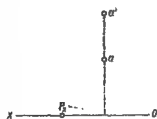
الشكل ٢٥٦



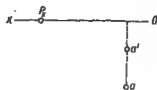
الشكل ٢٥٧



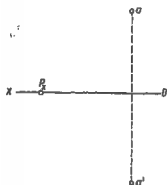
الشكل ٢٥٨



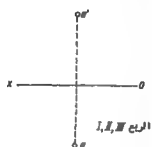
الشكل ٣٥٩



الشكل ٣٦٠



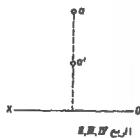
الشكل ٣٦١



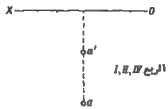
الشكل ٣٦٢



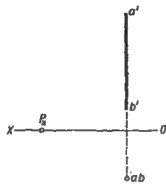
الشكل ٣٦٣



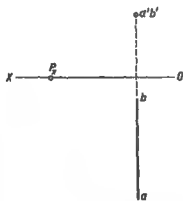
الشكل ٣٦٤



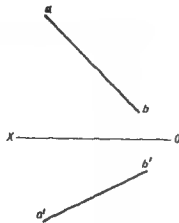
الشكل ٣٦٥



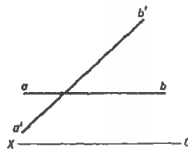
الشكل ٣٦٧



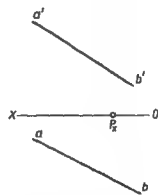
الشكل ٣٦٩



الشكل ٣٦٦



الشكل ٣٦٨



الشكل ٣٧٠

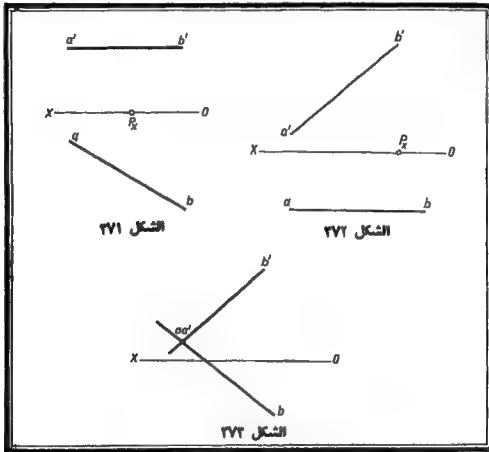
١ - كيفي (الشكل ٣٥٩ - ٣٥٩) .

٢ - شاقولي (الشكل ٣٦٠) .

٣ - أمامي (الشكل ٣٦١) .

٢١١ - ارسم أنثري مستوي P يوازي خط الأرض ويمر من النقطة A عبر الأرباع

المبينة (الشكل ٣٦٢ - ٣٦٥) . المسألة غير معينة .



٢١٢- مرر من النقطة $A(20, -30)$ مستويًا شاقوليًا P يصنع مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 45° .

٢١٣- مرر من النقطة $A(20, -30)$ مستويًا أماميًا P يصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 30° .

٢١٤- مرر من النقطة $A(30, -20)$ مستويًا يوازي خط الأرض ويصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 30° ، ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 45° .

٢١٥- ارمم أثري مستوي P ير من المستقيم AB إذا كان المستوي :

١- شاقوليًا (الشكل ٣٦٦ و ٣٦٧) .

٢- أماميًا (الشكل ٣٦٨ و ٣٦٩) .

٣- كفيًا (الشكل ٣٧٠ و ٣٧٢) .

٢١٦- ارمم أثري مستوي يوازي خط الأرض ويمر من المستقيم AB : باستعمال مستوي الإسقاط الجنبى وبدون إستعمال مستوي الإسقاط الجنبى (الشكل ٣٧٣) .

البحث الثالث عشر

تقاطع المستويات المعينة بآثارها

يتقاطع مستويان وفق خط مستقيم . يتعين المستقيم في الفراغ إذا عرفت نقطة منه وإتجاهه أو نقطتان منه .

وعليه لإيجاد الفعل المشترك لمستويين يتطلب إيجاد نقطتين مشتركين

لكلا المستويين أو إيجاد نقطة مع معرفة إنجاء الفصل المشترك .

في الحالة الخاصة يمكن استخدام أثري المستقيم كنقاط لتعيينه .

إن أثري الفصل المشترك لمستويين يقعان عند تقاطع الآثار المائلة للمستويين أي :

الأثر الأفقي للفصل المشترك يقع عند تقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين .

الأثر الشاقولي للفصل المشترك يقع عند تقاطع الأثرين الشاقولين للمستويين .

الأثر الجني للفصل المشترك يقع عند تقاطع الأثرين الجنيين للمستويين .

حسب وضعية المستويين المتقاطعين في الفراغ يمكن أن يكون للفصل المشترك

في المجموعة H و V : أثنان أفقي وشاقولي ، أفقي وحيد ، شاقولي وحيد ،

بدون أثر أفقي وأثر شاقولي .

إذا كان للفصل المشترك أثنان أفقي وشاقولي فهو إما أن يكون مستقيماً كلياً ،

أو مستقيماً جنياً أو مستقيماً قاطعاً لحظ الأرض

إذا كان للفصل المشترك أثر أفقي وحيد فهذا المستقيم سيوازي مستوى الإسقاط

الشاقولي (جهمي) ، وفي الحالة الخاصة يمكن أن يكون عمودياً على مستوى الإسقاط الأفقي.

إذا كان للفصل المشترك أثر شاقولي وحيد فهذا المستقيم سيوازي مستوى الإسقاط

الأفقي (أفقي) ، وفي الحالة الخاصة يمكن أن يكون عمودياً على مستوى الإسقاط

الشاقولي .

إذا كان للفصل المشترك أثر جني وحيد فهذا المستقيم سيوازي خط الأرض .

في تلك الحالات عندما يكون للفصل المشترك إسقاطي أي عمودي على أحد

مستويات الإسقاط يجب أن لا ننسى أن أحد مساقط المستقيم سينطبق على أثر

المستقيم أي :

إذا كان الفصل المشترك عمودياً على المستوي H فتسقطه الأفقي سينطبق على

الأثر الأفقي للمستقيم .

إذا كان الفصل المشترك عمودياً على المستوي V فسقطه الشاقولي سينطبق على
الأثر الشاقولي للمستقيم .

إذا كانت الفصل المشترك عمودياً على المستوي W (موازياً لخط الأرض)
فسقطه الجنبى سينطبق على الأثر الجنبى للمستقيم .

إذا كان الأثران المتجانسان للمستويين (الأفقين أو الشاقوليين، أو الأفقيين والشاقوليين)
لا يتقاطعان في حدود الشكل فعندها يجب أن توجد نقطة أو نقطتين ما تابعين
لفصل المشترك للمستويين .

تعين النقطة من الفصل المشترك باستعمال مستوي مساعد .

أمثلة

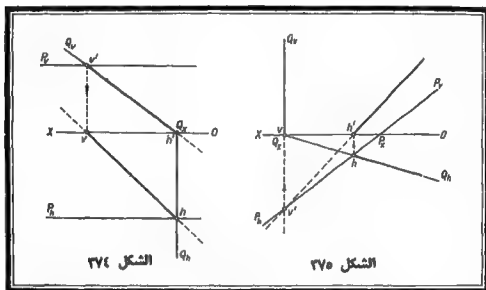
● المثال ٩٥ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٤) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم كيفي يمر من النقطتين
(h, h') و (v, v') الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والشاقوليين للمستويين . نرمم
مقطعي المستقيم المطلوب : الأفقي - من النقطتين h و v والشاقولي - من
النقطتين h' و v' وهذا ينطبق على الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي Q (لماذا ؟) . المستقيم
يمر من الربع الثاني والأول والرابع (لماذا ؟) .

● المثال ٩٦ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (شكل ٣٧٥) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم كيفي يمر من النقطتين (h, h') ، (v, v')
الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والشاقوليين للمستويين . نرمم مقطعي المستقيم المطلوب :

الأفقي - من النقطتين v و h الذي ينطبق على الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي Q
 (لماذا ؟) والشاقولي - من النقطتين v' و h' . المستقيم يمر من الربع الأول
 والرابع والثالث (لماذا ؟) .



● المثال ٩٧ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٦) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم جنبي يمر من النقطتين (h, h') و (v, v') الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والشاقولين للمستويين والتوضعيتين على عمود واحد على خط الأرض . لرسم مسطقي المستقيم المطلوب : الأفقي - من النقطتين v و h والشاقولي - من النقطتين v' و h' . للرسم أيضاً مسطقه الجنبي (h^*v^*) .
 يبين من أي الأرباع يمر المستقيم وماذا يعني إنطباق أثره على الخطط .

● المثال ٩٨ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٧)

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم أفقي يمر من النقطة - الأثر (v, v') الواقعة عند تقاطع الأثرين الشاقولين للمستويين . لرسم مسقطي المستقيم المطلوب : الشاقولي - من النقطة v' - موازياً لخط الأرض وهذا ينطبق على الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي Q (لماذا ؟) ، والأفقي - من النقطة v - موازياً للأثر الأفقي (P_v) للمستوي P . المستقيم يمر من الربع الأول والثاني (لماذا ؟) .

نتيجة : يتقاطع المستوي الكيلبي مع المستوي الموازي للمستوي H وفق مستقيم أفقي .

● **المثال ٩٩ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٨) .

الحل : انظر حل المسألة السابقة .

نتيجة : إذا كان المستويان كيلبيين ، وكان أثرهما الشاقوليان متقاطعين ، وأثرهما الأفقيان متوازيين فيما بينهما فهما يتقاطعان وفق مستقيم أفقي .

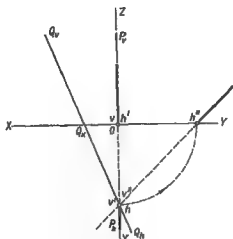
● **المثال ١٠٠ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٩) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم أفقي عمودي على مستوي الإسقاط الشاقولي (لماذا ؟) .

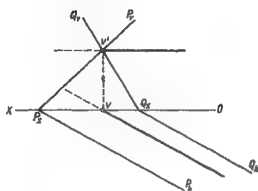
ينطبق المسقط الشاقولي للمستقيم المطلوب على النقطة v' (لماذا ؟) ، أما مسقطه الأفقي فيمر من النقطة v وهو عمودي على خط الأرض . المستقيم يمر من الربع الأول والثاني (لماذا ؟) .

نتيجة : يتقاطع مستويان أماميان وفق مستقيم عمودي على مستوي الإسقاط الشاقولي أي وفق مستقيم أمامي .

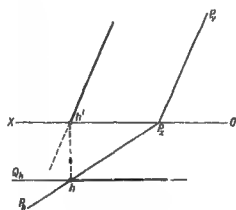
● **المثال ١٠١ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٠) .



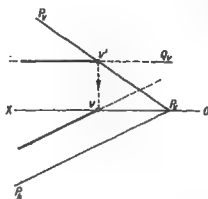
الشكل ٢٧٦



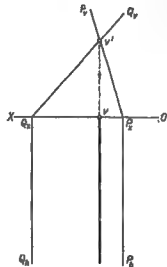
الشكل ٢٧٨



الشكل ٢٨٠



الشكل ٢٧٧



الشكل ٢٧٩

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم جيهي يمر من نقطة الأثر (h, h') الواقعة عند تقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين . لنرسم مقطعي المستقيم المطلوب : الأفقي من النقطة h يوازي خط الأرض وينطبق على الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي Q (لماذا ؟) والشافولي - من النقطة h' موازياً للأثر الشافولي (p_v) للمستوي P . المستقيم يمر من الربيع الأول والرابع (لماذا ؟) .

نتيجة : المستوي الكيفي يتقاطع مع المستوي الموازي للمستوي v وفق مستقيم جيهي .

● **المثال ١٠٢ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨١) .

الحل : أنظر حل المسألة السابقة .

نتيجة : المستويات الكيفيان اللذان يتقاطع أثراهما الأفقيان ويتوازي أثراهما الشافوليات يتقاطعان وفق مستقيم جيهي .

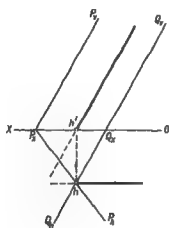
● **المثال ١٠٣ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٢) .

الحل : يتقاطع المستويان الشافوليان P و Q وفق مستقيم جيهي عمودي على مستوي الإسقاط الأفقي . المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب ينطبق على النقطة h (لماذا ؟) أما مسقطه الشافولي فيمر من النقطة h' عمودياً على خط الأرض . المستقيم يمر من الربيع الأول والرابع (لماذا ؟) .

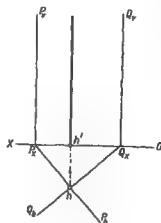
نتيجة : يتقاطع المستويان الشافوليان وفق مستقيم عمودي على مستوي الإسقاط الأفقي أي شافولي .

● **المثال ١٠٤ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٣ و ٣٨٤) .

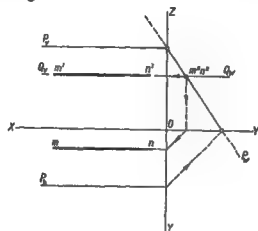
الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا ؟) .



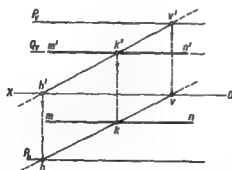
الشكل ٢٨١



الشكل ٢٨٢

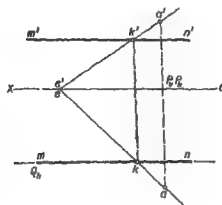


الشكل ٢٨٣

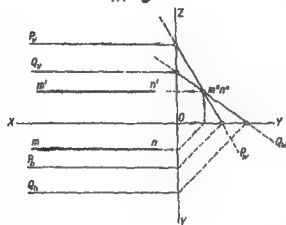


الشكل ٢٨٤

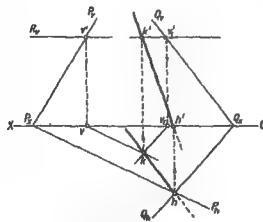
٢٨١



الشكل ٢٨٥



الشكل ٢٨٦



الشكل ٢٨٧

الطريقة الأولى : ينطبق المسقط الجنبى ($m'n''$) . المستقيم المطلوب على الأثر الجنبى لهذا المستقيم الذي يقع كما هو معلوم عند تقاطع الأثرين الجنبين (Q_1 و P_1) للمستويين . نعين الأثرين الجنبين للمستويين المقروضين . نقطة تقاطعها تحدد المسقط الجنبى ($m'n''$) للمستقيم المطلوب .

بعد ذلك نوجد المسقطين الأفقي (mn) والشافوي ($m'n'$) اللذين يجب أن يكونا موازيين لخط الأرض (لماذا ؟) .

الطريقة الثانية : بما أن المستقيم المطلوب MN يقع في المستوي Q فخطه الشافوي ($m'n'$) ينطبق على الأثر الشافوي (Q_1) لهذا المستوي (لماذا ؟) . وبعرفة المسقط الشافوي ($m'n'$) للمستقيم يمكن أن نجد مسقطه الأفقي (mn) بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبى . لهذا نأخذ نقطة ما k' على المستقيم $m'n'$ ونوجد المسقط الأفقي (k) للنقطة ، علماً بأن النقطة (k, k') تقع في المستوي P . من النقطة k نرمم المسقط الأفقي (mn) للمستقيم المطلوب - موازياً لخط الأرض .

● المثال ١٠٥ : أوجد الفصل المشترك للمستويين Q و P (الشكل ٣٨٥) .

الحل : الطريقة الأولى : انظر حل المسألة السابقة .

الطريقة الثانية : بما أن المستقيم المطلوب يقع في المستوي Q فخطه الأفقي (mn) ينطبق على الأثر الأفقي (Q_1) لهذا المستوي (لماذا ؟) وبعرفة المسقط الأفقي (mn) للمستقيم يمكن أن نوجد مسقطه الشافوي ($m'n'$) بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبى . لهذا نأخذ على المستقيم mn نقطة k ونوجد المسقط الشافوي (k') للنقطة علماً بأن النقطة (k, k') تقع في المستوي P .

من النقطة k' نرسم المسقط الشاقولي $(m'n')$ للمستقيم المطلوب - موازياً لخط الأرض .

● المثال ١٠٦ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٦) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموزي لخط الأرض (لماذا) .
نوجد مسقطه الجنبى $(m'n')$ عند تقاطع الأثرين الجنبين للمستويين ، بعد ذلك وبمساعدة المسقط الجنبى للمستقيم نعين مسقطه الأفقى (mn) والشاقولي $(m'n')$ اللذين يوازيان خط الأرض .

● المثال ١٠٧ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٧) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم Q وفق مستقيم Q يمر من نقطة الأثر (h,h') لتقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين . بما أن نقطة الأثر (v,v') لتقاطع الأثرين الشاقولين للمستويين بعيدة نظراً لأن الأثرين لا يتقاطعان في حدود الشكل فعوضاً عن النقطة (v,v') يجب أن توجد نقطة أخرى من الفصل المشترك .

لهذا نقوم بما يلي : نرسم مستويًا مساعدًا R مثلاً موازياً للمستوي H وكما هو معروف سيقطع كلا من المستويين وفق مستقيم أفقى . عند تقاطعها نحصل على نقطة مساعدة (k,k') مشتركة بين المستويين .

بإيجاد النقطة الثانية (k',k) من المستقيم نرسم مسقطيه : الأفقى - من التظتين h و k والشاقولي - من التظتين k' و h' .

من أي الأرباع يمر الفصل المشترك ؟

ملاحظة : عند الضرورة يمكننا باستعمال الطريقة المذكورة آنفاً تعيين تظتين ما أخريتين من الفصل المشترك وذلك برسم مستويين مساعدين على التوالي من الأسفل أخذهما موازيين للمستوي H أو V (أفقيين أو جيبين) .

● المثال ١٠٨ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٨) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم يقطع خط الأرض في النقطتين (h, h') و (v, v') المنطقتين على القطعة (m, m') الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والأثرين الشاقوليين للمستويين . من المعروف أن النقطتين الأثرين (h, h') و (v, v') لا تعينان مستقيماً لأنطباقها بما يلزمنا بتعيين نقطة أخرى من هذا المستقيم مشتركة بين المستويين .

النقطة (a, a') معطاة في المستوي P . لتتحقق قبل كل شيء ألا تقع النقطة (a, a') في المستوي Q أيضاً ؟ ننجز التحقق مثلاً بمساعدة مستقيم أفقي . النقطة (a, a') تقع في الحقيقة في المستوي Q أي أنها مشتركة بين المستويين .

لنرسم مساقط المستقيم المطلوب : الشاقولي - من النقطتين m' و a' والأفقي - من النقطتين a و m .

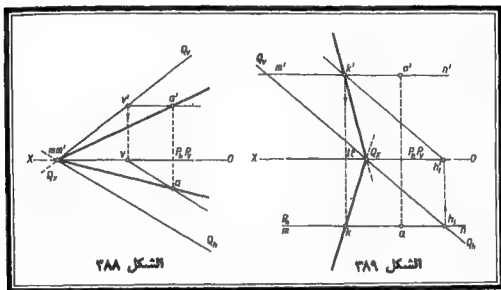
المستقيم يمر من الربع الأول والثالث (لماذا ؟) .

● المثال ١٠٩ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٩) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم يمر من النقطة (h, h') والتي تنطبق معها النقطتان (h, h') و (v, v') لتقاطع الآثار المتوافقة للمستويين . النقطة (a, a') تقع حسب الفرض في المستوي P ، ولا تقع في المستوي Q إذ يمكن أن نفتتح بهذا مثلاً بمساعدة مستقيم جيهي . بناء عليه لتعين المستقيم يجب أن توجد نقطة أخرى . نرمس متوياً مساعداً R موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي ومرآاً من النقطة (a, a') ، فآثره الأفقي (R_h) يمر من النقطة a - موازياً لخط الأرض . المستوي P يقطع المستوي P وفق مستقيم (mn, mn') موازياً لخط الأرض ومرآياً من (h, h') أما المستوي Q - فوفق مستقيم جيهي مارٍ من النقطة (h, h') .

عند تقاطع المستقيم MN والمستقيم الجيهي نجد الآ

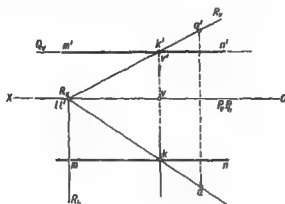
يجب أن ير الفصل المشترك . لنرسم مسطبي المستقيم المطلوب : الأفقي - من
النقطتين l و k والشافوي - من النقطتين l' و k' .



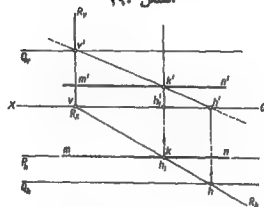
● المثال ١١٠ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q بدون استخدام مستوي
الإسقاط الجنبى (الشكل ٣٩٠) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم MN موازٍ لخط الأرض
(لماذا ؟) .

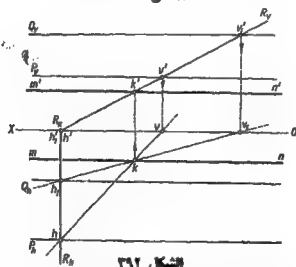
بمعرفة إتجاه المستقيم المطلوب يمكننا تعيين نقطة واحدة منه . لهذا نرسم مستويًا
مساعدًا أماميًا R ماراً من النقطة (a, a') . المستوي المساعد R يقطع المستوي P وفق
المستقيم $(al, a'l')$ أما المستوي Q - فوفق مستقيم أمامي مارٍ من النقطة (v, v') ،
وعند تقاطعها نحصل على النقطة (k, k') . نرسم المقتطين $(mn, m'n')$ للمستقيم المطلوب
من المساط المرافقة للنقطة (k, k') وبصورة موازية لخط الأرض . كما توقعنا المسقط



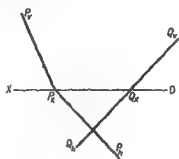
الشكل ٣٩٠



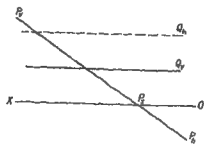
الشكل ٣٩١



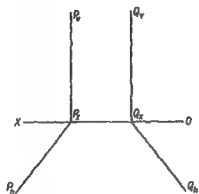
الشكل ٣٩٢



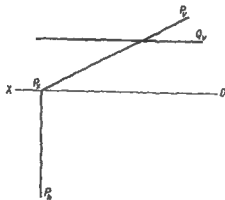
الشكل ٣٩٢



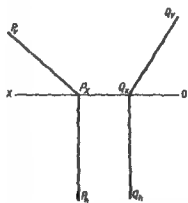
الشكل ٣٩٤



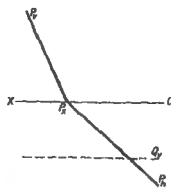
الشكل ٣٩٥



الشكل ٣٩٦



الشكل ٣٩٧



الشكل ٣٩٨

الشافولي ($m'n'$) المستقيم المطلوب ينطبق على الأثر الشافولي (Q_r) للمستوي Q (لماذا ؟) .

● المثال ١١١ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q بدون استعمال مستوي الإسقاط الجني (الشكل ٣٩١) .

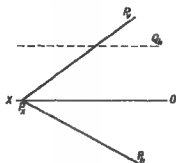
الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا ؟) .

بمعرفة اتجاه المستقيم المطلوب يزمنا تعيين نقطة واحدة منه لهذا ندخل مستوياً شافولياً R . المستوي R يقطع المستوي Q وفق المستقيم (h_v, h'_v) أما المستوي P فوفق مستقيم شافولي مار من النقطة (h_1, h'_1) وعند تقاطعها نحصل على النقطة (k, k') . نرمم مسطلي المستقيم المطلوب ($mn, m'n'$) - بصورة موازية لخط الأرض - من مسطلي النقطة الخاصة (k, k') .

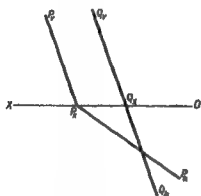
● المثال ١١٢ : أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q بدون إستعمال مستوي الإسقاط الجني (الشكل ٣٩٢) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا ؟) . بمعرفة اتجاه المستقيم المطلوب علينا أن نوجد نقطة واحدة منه . لهذا نرمم مستوياً مساعداً أمامياً R يقطع المستوي P وفق المستقيم (h_v, h'_v) والمستوي Q وفق المستقيم ($h_1v_1, h'_1v'_1$) وعند تقاطعها نحصل على النقطة (k, k') .

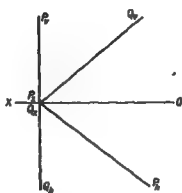
نرمم مسطلي المستقيم المطلوب ($mn, m'n'$) بصورة موازية لخط الأرض من المسافت المراقبة للنقطة (k, k') .



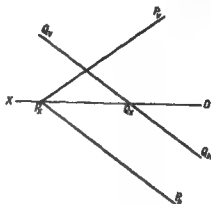
الشكل ٣٩٩



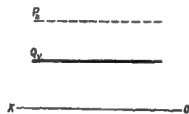
الشكل ٤٠١



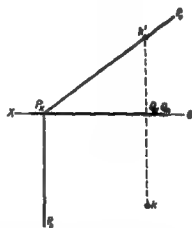
الشكل ٤٠٢



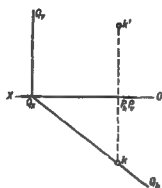
الشكل ٤٠٠



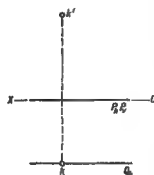
الشكل ٤٠٢



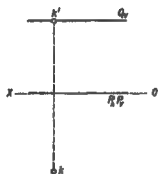
الشكل ٤٠٤



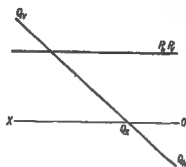
الشكل ١٠.٥



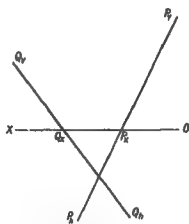
الشكل ١٠.٦



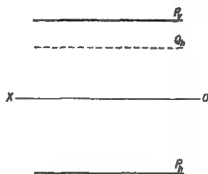
الشكل ١٠.٧



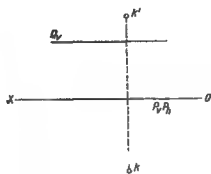
الشكل ١٠.٨



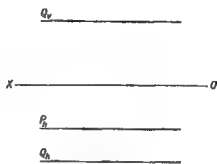
الشكل ١٠.٩



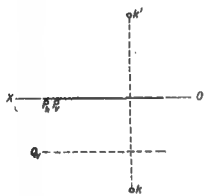
الشكل ١٠.١٠



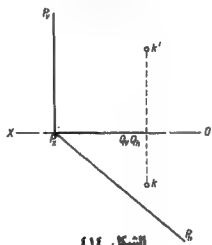
الشكل ١١١



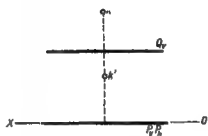
الشكل ١١٢



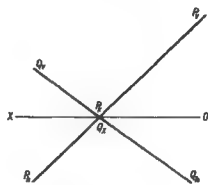
الشكل ١١٣



الشكل ١١٤



الشكل ١١٥

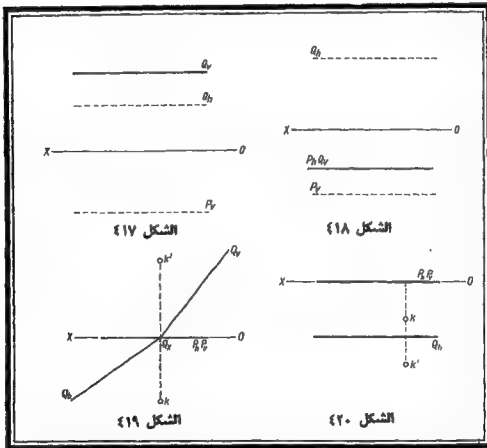


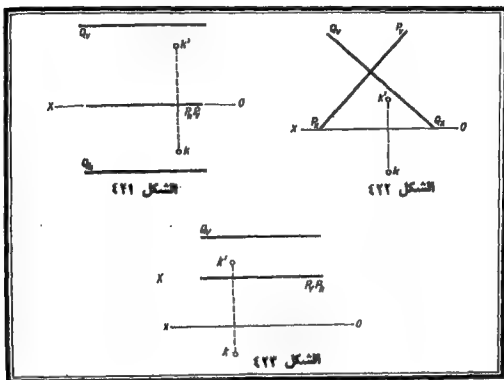
الشكل ١١٦

مسائل

٢١٧- أوجد الفصل المشترك للمستويين Q و P :

١ - بدون إستعمال مستوي مساعد (الشكل ٣٩٣-٤١٣) .





٢ - بدون استعمال مستوي مساعد أو مستوي الإسقاط الجني (الشكل

٤١٠ - ٤١٣) .

٣ - باستعمال مستوي مساعد (الشكل ٤١٤ - ٤٢١) .

٢١٨ - أوجد الأثرين الأفقيين لمستويين متقاطعين P و Q إذا عرف أنهما الشافويان

ونقطة K من فعلها المشترك (الشكل ٤٢٢ و ٤٢٣) .

البحث الرابع عشر

تقاطع مستقيم مع مستوي

لإيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي نقوم بما يلي :

١ - نغم المستقيم المقروض في مستوي ما مساعد (والأسهل أن يكون إسقاطياً) .

٢ - نوجد الفصل المشترك للمستويين - المقروض والمساعد .

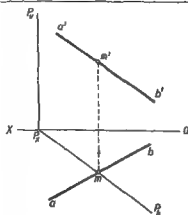
٣ - عند تقاطع المستقيمين المقروض والحاصل - نحصل على النقطة المطلوبة .

ملاحظة : إذا كان أحد عناصر التقاطع - المستوي أو المستقيم - إسقاطياً فاستعمال القاعدة المذكورة غير مجدي ، وذلك لأنه في أغلب هذه الحالات يتم تعيين نقطة التقاطع بسهولة أكبر (انظر الأمثلة) .

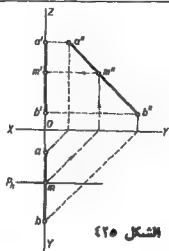
أمثلة

● المثال ١١٣ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٢٤) .

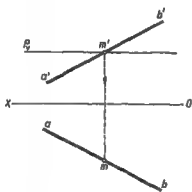
الحل : ل نرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن النقطة M تقع في مستوي شاقولي فنقطتها الأفقي (m) يجب أن يقع على الأثر الأفقي (p_a) للمستوي . وبما أن هذه النقطة M تقع على المستقيم AB فنقطتها الأفقي (m)



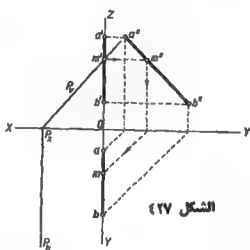
الشكل ٢٤



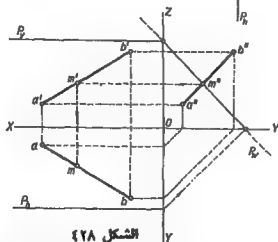
الشكل ٢٥



الشكل ٢٦



الشكل ٢٧



الشكل ٢٨

يجب أن يقع على المقط الأفقي (ab) المستقيم . ومنه فالمقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة يجب أن يقع على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي وعلى المقط الأفقي (ab) المستقيم ، أي في نقطة تقاطعها . بمعرفة المقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة نوجد مسقطها الشاقولي (m') على المقط الشاقولي (a'b') للمستقيم .

نتيجة : المقط الأفقي لنقطة تقاطع أي مستقيم مع مستوي شاقولي يقع عند تقاطع الأثر الأفقي للمستوي مع المقط الأفقي للمستقيم .

● المثال ١١٤ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٢٥).

الحل : ل نرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. المستوي P يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي ، لذلك فالمقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة يقع عند تقاطع المستقيمين p_h و ab . بما أن المستقيم المفروض (ab, a'b') جنبي لذلك باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي وبواسطة النقطة m نوجد m' على المستقيم a'b' بعد ذلك وبواسطة النقطة m' نوجد النقطة m' على المستقيم a'b' .

● المثال ١١٥ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٢٦).

الحل : ل نرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن النقطة M تقع في مستوي أفقي فمسقطها الشاقولي (m') يجب أن يقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . وبما أن النقطة M كذلك تقع على المستقيم AB فمسقطها الشاقولي (m') يجب أن يقع أيضاً على المقط الشاقولي (a'b') للمستقيم . ومنه فالمقط الشاقولي (m') للنقطة المطلوبة يجب أن يقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي وعلى المقط الشاقولي (a'b') للمستقيم أي عند تقاطعها . بمعرفة المقط الشاقولي (m') للنقطة المطلوبة نوجد مسقطها الأفقي (m) على المقط الأفقي (ab) للمستقيم .

نتيجة : إن المسقط الشاقولي لثقة تقاطع أي مستقيم مع مستوي أمامي يقع عند تقاطع الأثر الشاقولي للمستوي الأمامي مع المسقط الشاقولي للمستقيم

● **المثال ١١٦ :** أوجد ثقة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٢٧).

الحل : لنرمز للثقة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. المستوي المفروض P أمامي . المسقط الشاقولي (m') للثقة المطلوبة يقع عند تقاطع المستقيمين p_v و $a''b''$.

بما أن المستقيم المفروض جنبي لذلك باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي وبمساعدة النقطة m' نوجد الثقة m'' على المستقيم $a''b''$ ، وبعد ذلك وبمساعدة m'' نوجد الثقة m على المستقيم $a'b'$.

● **المثال ١١٧ :** أوجد ثقة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٢٨) .

الحل : لنرمز للثقة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن الثقة M تقع في مستوي موازي لخط الأرض فمسقطها الجنبي (m'') يجب أن يقع على الأثر الجنبي (P_v) للمستوي . وبما أن هذه الثقة تقع على المستقيم AB فمسقطها الجنبي (m'') يجب أن يقع كذلك على المسقط الجنبي $(a''b'')$ للمستقيم . ومنه فالمسقط الجنبي (m'') للثقة المطلوبة يجب أن يقع على الأثر (P_v) للمستوي ، وعلى المسقط الجنبي $(a''b'')$ للمستقيم أي عند تقاطعها .

بإيجاد الأثر الجنبي للمستوي والمسقط الجنبي للمستقيم نحصل عند تقاطعها على المسقط الجنبي (m'') للثقة المطلوبة . وبعرفة المسقط الجنبي (m'') للثقة المطلوبة نوجد مسقطها الآخرين على مسطلي المستقيم الموازيين .

نتيجة : المسقط الجنبي لثقة تقاطع أي مستقيم مع مستوي موازي لخط الأرض يقع عند تقاطع الأثر الجنبي للمستوي مع المسقط الجنبي للمستقيم .

ملاحظة : فيما يلي نين كيف يمكن أن نحل هذه المسألة بدون استعمال مستوي الإسقاط الجني .

● **المثال ١١٨ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٢٩) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. المستوي المفروض P يمر من خط الأرض إذن المسقط الجني (m'') للنقطة المطلوبة سيقع عند تقاطع الأثر الجني (p_w) للمستوي والمسقط الجني $(a''b'')$ للمستقيم .

بمعرفة المسقط الجني (m'') للنقطة المطلوبة ، نوجد المقتبين الآخرين للنقطة على مسطقي . المستقيم الموازيين .

ملاحظة : يمكن حل المسألة بدون إستعمال مستوي الإسقاط الجني ، ولكن الحل بالطريقة المشروحة أبسط بكثير .

● **المثال ١١٩ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٣٠) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن هذه النقطة تقع على المستقيم الشاقولي $(ab, a'b')$ فسقطها الأفقي (m) يجب أن ينطبق على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم . وبمعرفة المسقط الأفقي (m) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (m') ، لهذا يستعمل مستقيم جيني (أو أفقي) . تمتة الانشاء مينة على الشكل .

● **المثال ١٢٠ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٣١) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن هذه النقطة تقع على مستقيم أمامي فسقطها الشاقولي (m') ينطبق على المسقط الشاقولي $(a'b')$ للمستقيم .

وبعرفة المسقط الشاقولي (m') للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (m)، لهذا يستعمل مستقيم أفقي (أوجهي) . تمة الإنشاء مينة على الشكل .

● المثال ١٢١ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٢) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن هذه النقطة تقع على مستقيم شاقولي فمسقطها الأفقي (m) ينطبق على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم . وبعرفة المسقط الأفقي (m) للنقطة نوجد المسقط الأفقي (m') ، لهذا نستعمل مستقيماً مساعداً ($nk, n'k'$) . تمة الإنشاء مينة على الشكل .

● المثال ١٢٢ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٣) .

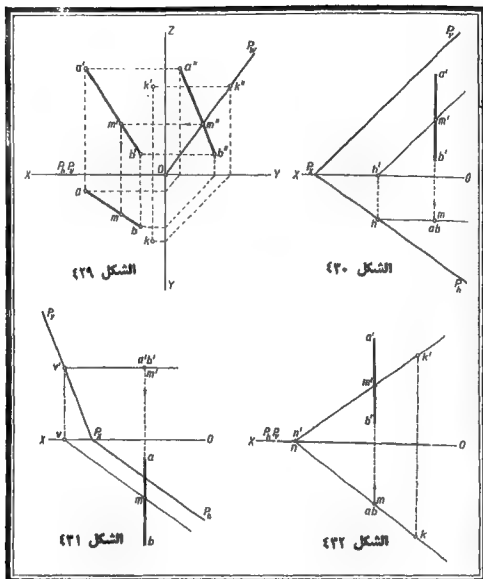
الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. بما أن هذه النقطة تقع على مستقيم أمامي فمسقطها الشاقولي (m') سينطبق على المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم . وبعرفة المسقط الشاقولي (m') للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (m) ، لهذا نستعمل مستقيماً مساعداً ($hv, h'v'$) . بالرغم من أن المستوي P يوازي خط الأرض فالمسألة تحل بدون استعمال مستوي الإسقاط الجني .

في الحالة المعطاة لم نستعمل، ييزات نقاط المستوي وإنما يميزات نقاط المستقيم الأمامي .

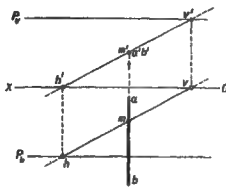
● المثال ١٢٣ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٤) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R (أو في مستوي أمامي) ، فيقطع المستوي المقروض وفق المستقيم ($hv, h'v'$) . عند تقاطع المسقطين الشاقولين ($a'b'$ و $h'v'$) نحصل على المسقط الشاقولي (m') للنقطة المطلوبة . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الشاقولي (m') للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (m) على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم .

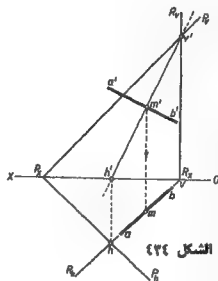
● المثال ١٢٤ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٥) .



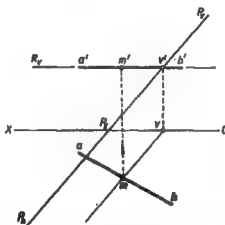
الحل : نرسم المسطرة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$ لنضم المستقيم AB في المستوي P ، الذي يوازي مستوي الإسقاط الأفقي ويقطع المستوي المفروض P



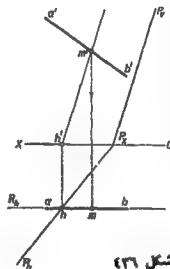
الشكل ٤٣٣



الشكل ٤٣٤



الشكل ٤٣٥



الشكل ٤٣٦

وفق مستقيم أفقي . عند تقاطع المقيطين اللاحقين للمستقيم الأفقي والمستقيم المفروض
نحصل على المقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة . وبمساعدة المقط الأفقي (m) لنقطة

نوجد مستطها الشاقولي (m') على المستقيم ($a'b'$) .
 المستقيم AB يمكن أن يضم في مستوي شاقولي أيضاً ، ولكن هذا يعقد حل
 المسألة . (على الطالب التحقق من ذلك) .

● المثال ١٢٥ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٣٦) .
 الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (m, m') . لنضم المستقيم AB في المستوي
 الجبهي R فيقطع المستوي المفروض P وفق مستقيم جبهي . وعند تقاطع المستطين الشاقولين
 للمستقيم الجبهي والمستقيم المفروض نحصل على المسقط الشاقولي (m') للنقطة المطلوبة . وبمساعدة
 المسقط الشاقولي (m') للنقطة نوجد المسقط الأفقي (m) على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم .

● المثال ١٢٦ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٣٧) .
 الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (m, m') . لنضم المستقيم AB في
 مستوي شاقولي R فيقطع المستوي المفروض P وفق المستقيم ($h'v, h'v'$) . عند
 تقاطع المستطين الشاقولين للمستقيمين - المساعد والمفروض - نحصل على المسقط
 الشاقولي (m') للنقطة المطلوبة . بمساعدة المسقط الشاقولي (m') للنقطة نوجد المسقط
 الأفقي (m) على المسقط الأفقي للمستقيم (ab) .

● المثال ١٢٧ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٣٨) .
 الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (m, m') . لنضم المستقيم AB
 في مستوي أمامي R فيقطع المستوي المفروض وفق المستقيم ($h'v, h'v'$) . عند
 تقاطع المستطين الأفقيين للمستقيمين - المساعد - نحصل على المسقط الأفقي
 (m) للنقطة المطلوبة . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الأفقي (m) للنقطة نوجد مستطها
 الشاقولي (m') على المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم .

● المثال ١٢٨ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ١٣٩) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M (m, m')$. بما أن المستقيم المفروض AB جنبي ، لذلك فمثل هذه المسألة يجب أن لا ننقض النظر عن مستوي الإسقاط الجنبي . نحل المسألة كما مر معنا في المثال ١١٧ . نرمز الأثر الجنبي (p_v) للمستوي ، والمسط الجنبي (a^*b^*) للمستقيم . وعند تقاطعها نحصل على المسقط الجنبي (m^*) للنقطة المطلوبة . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الجنبي (m^*) للنقطة نوجد المسقطين الآخرين $(m'$ و $m)$ على المسقطين الموافقين $(a'b'$ و $ab)$ للمستقيم .

● **المثال ١٢٩ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٤٠) .

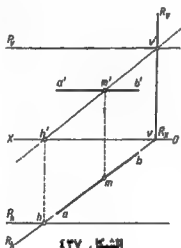
الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $M(m, m')$. لنضم المستقيم AB في مستوي جنبي R فيقطع المستوي المفروض P وفق مستقيم جنبي $(h'v', h'v)$. بما أن كلا المستقيمين - المفروض والمساعد - جنبيين ، لذلك نوجد المسقط الجنبي (m^*) للنقطة المطلوبة عند تقاطع المسقطين الجنبيين $(h^*v^*$ و $a^*b^*)$ لهذين المستقيمين . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الجنبي (m^*) للنقطة نوجد المسقطين الآخرين $(m'$ و $m)$ على المسقطين الموافقين $(a'b'$ و $ab)$ للمستقيم .

● **المثال ١٣٠ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٤٤١) .

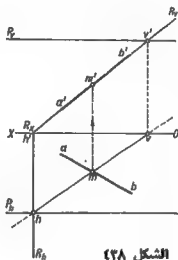
الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف $K(k, k')$. بما أن المستوي المفروض شاقولي (لماذا ؟) ، نوجد المسقط الأفقي (k) للنقطة عند تقاطع المستقيمين mn و ab ، (لماذا ؟) ، أو المستقيمين mn و cd . وبمساعدة المسقط الأفقي (k) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (k') على المسقط الشاقولي $(m'n')$ للمستقيم .

● **المثال ١٣١ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع مستوي المثلث ABC (الشكل ٤٤٢) .

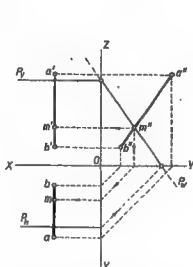
الحل : ل نرمز للنقطة المطاوية بالحرف $K(k, k')$. بما أن المستوي المفروض
أمامي (لذا ؟) ، نوجد المسقط الشاقولي (k') للنقطة عند تقاطع السقيم $m'n'$
مع المسقط الشاقولي $(a'b'c')$ للمثلث (لذا ؟) . بمساعدة المسقط الشاقولي (k') للنقطة



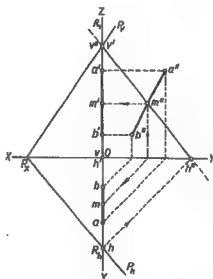
الشكل ٣٧



الشكل ٣٨



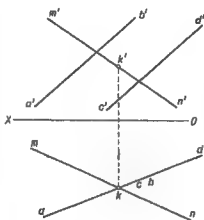
الشكل ٣٩



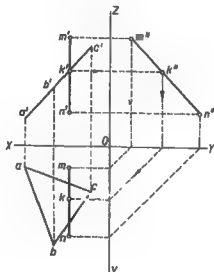
الشكل ٤٠

نوجد مسقطها الأفقي (k) على المسقط الأفقي (mn) للمستقيم (كيف ؟)

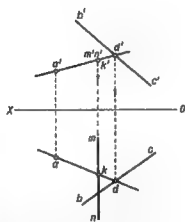
• المثال ١٣٢ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع المستوي المضي بنقطة A ومستقيم BC (الشكل ٤٤٣)



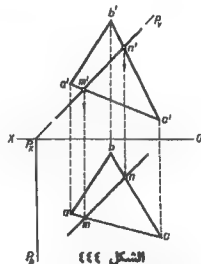
الشكل ٤٤١



الشكل ٤٤٢



الشكل ٤٤٣



الشكل ٤٤٤

الحل : لتوزع النقطة المطلوبة بالحرف $K(k, k')$. بما أن هذه النقطة يجب أن تقع على المستقيم الأمامي $(mn, m'n')$ فسقطها الشاقولي (k') يجب أن ينطبق على النقطتين m' و n' (لماذا ؟) . بواسطة المسقط الشاقولي (k') للنقطة توجد مسقطها الأفقي (k) على المستقيم mn بمعرفة أن النقطة (k, k') تقع كذلك في المستوى المفروض . تمة الحل مينة على الشكل

● **المثال ١٢٣ :** أوجد الفصل المشترك للمستوي P مع مستوي المثلث ABC (الشكل ٤٤٤) .

الحل : الطريقة الأولى : بتعين الفصل المشترك بنقطتين تابعتين للمستويين المفروضين بأن واحد . نوجد النقطتين (m, m') و (n, n') أي نقطتي تقاطع الضلعين $(ac, a'c')$ و $(bc, b'c')$ للمثلث مع المستوي P . المستقيم $(mn, m'n')$ المار من النقطتين (m, m') و (n, n') هو المستقيم المطلوب .

الطريقة الثانية : بما أن المستوي P - أمامي ، فالمسقط الشاقولي $(m'n')$ للفصل المشترك ينطبق على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . وبما أن المستقيم المطلوب $(mn, m'n')$ ينتمي لمستوي المثلث ABC ، فمساعدة المسقط الشاقولي $(m'n')$ للفصل المشترك نوجد مسقطه الأفقي (mn) .

● **المثال ١٢٤ :** أوجد الفصل المشترك للمستوي P مع المستوي المعطى بمستقيم معلوم AB ونقطة معلومة C (الشكل ٤٤٥) .

الحل : الطريقة الأولى : بتعين الفصل المشترك إذا أوجدنا نقطتين تابعتين للمستويين المفروضين . النقطة (c, c') لا يمكن اعتبارها نقطة من الفصل المشترك (لماذا ؟) . لايجاد هاتين النقطتين من الأسهل أن نحول المستوي المعطى

يستقيم ونقطة إلى مستوي معطى مستقيمين متوازيين $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$.
بعد ذلك نوجد النقطتين (m, m') و (n, n') المرافقتين لتقاطع هذين
المستقيمين مع المستوي P . المستقيم $(mn, m'n')$ المار من النقطتين (m, m')
و (n, n') هو المستقيم المطلوب

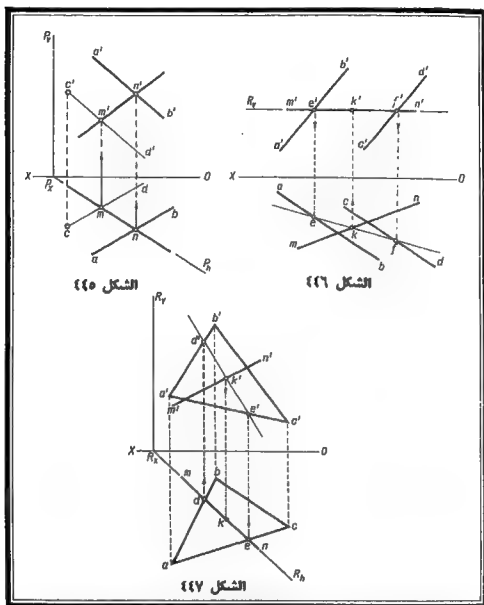
الطريقة الثانية : بما أن المستوي P - شاقولي فالمسقط الأفقي (mn) للفصل
المشترك سينطبق على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . وبما أن المستقيم المطلوب
 $(mn, m'n')$ ينتمي أيضاً للمستوي الثاني لذلك بواسطة المسقط الأفقي (mn)
للمستقيم نوجد مسقطه الشاقولي $(m'n')$.

● المثال ١٢٥ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع المستوي المعين بالمستقيمين
المتوازيين AB و CD (الشكل ٤٤٦) .

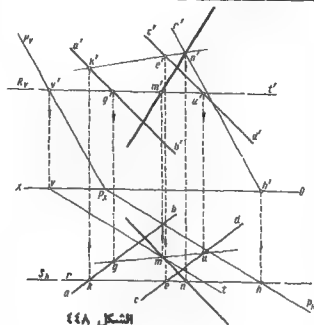
الحل : بما أن المستوي المفروض كفي (لماذا ؟) ، لذلك نضم المستقيم
 MN في مستوي مساعد R مثلاً أفقي ، ثم نوجد الفصل المشترك $(ef, e'f')$
للمستويين . النقطة المطلوبة (k, k') نحصل عليها عند تقاطع المستقيمين
 $(mn, m'n')$ و $(ef, e'f')$. (انظر المثال ١٢٣) .

● المثال ١٢٦ : أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع مستوي المثلث ABC
(الشكل ٤٤٧) .

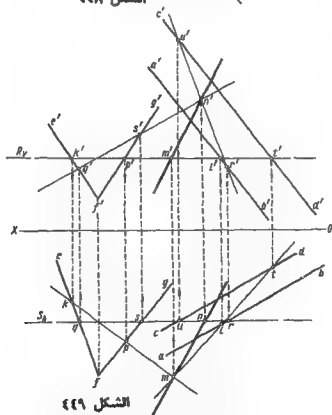
الحل : نضم المستقيم MN في مستوي شاقولي مساعد R ، ثم نوجد الفصل
المشترك $(de, d'e')$ للمستويين ، النقطة المطلوبة (k, k') تقع عند تقاطع
المستقيمين $(mn, m'n')$ و $(de, d'e')$.



● المثال ١٣٧ : أوجد الفصل المشترك للمستوي P مع المستوي المعين بالمستقيمين
التوازيين AB و CD (الشكل ١٤٨) .



الشكل ١٤٨



الشكل ١٤٩

الحل : يمكن حل هذه المسألة بثلاث طرق .

الطريقة الأولى : نحول المستوي المعطى بدون أثره إلى مستو معطى بأثره ،
بعد ذلك نحل المسألة كما مر معنا أعلاه . (انظر الأمثلة ٩٥ - ١١٢) .

الطريقة الثانية : نوجد نقاط تقاطع المستقيمين AB و CD مع المستوي P فيتعين
لدينا الفصل المشترك .

الطريقة الثالثة : نوجد النقاط التي تعين الفصل المشترك ، وذلك بزم مستويين
مساعدين على التوالي .

أسهل هذه الطرق الثلاث هي الطريقة الثالثة . لنزعم مستوياً مساعداً R موازياً
لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستوي P وفق مستقيم أفقي $(v't, v't')$ ، والمستوي
الثاني وفق مستقيم أفقي $(gu, g'u')$ ، وعند تقاطعها نحصل على النقطة (m, m') .
بعد ذلك نزم مستوياً مساعداً آخر S مثلاً موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي
فيقطع المستوي P وفق المستقيم الجبهي $(rh, r'h')$ ، والمستوي الآخر وفق المستقيم
الجبهي $(ke, k'e')$ ، وعند تقاطعها نحصل على النقطة (n, n') . المستقيم $(mn, m'n')$
الذي ين من النقطتين (m, m') و (n, n') هو المستقيم المطلوب .

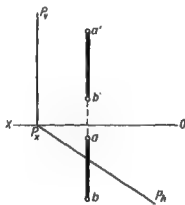
● المثال ١٢٨ : أوجد الفصل المشترك للمستويين المعطيين بالمستقيمين المتقاطعين FE
و FG والمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٤٤٩) .

الحل : لنوجد النقطتين (m, m') و (n, n') المشتركين بين المستويين المفروضين .
لهذا نزم مستوياً مساعداً R موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستويين
المفروضين وفق المستقيمين الأفقيين $(kp, k'p')$ و $(lt, l't')$ وعند تقاطعها
نحصل على النقطة (m, m') . بعد ذلك نزم المستوي المساعد الآخر S موازياً

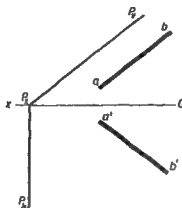
لمستوي الاسقاط الشاقولي فيقطع المستويين المفروضين وفق مستقيمين جيبين
 $(qs, q's')$ و $(ru, r'u')$ ، وعند تقاطعها نحصل على النقطة (n, n') . المستقيم
 $(mn, m'n')$ المار من النقطتين (m, m') و (n, n') هو المستقيم المطلوب .

مسائل

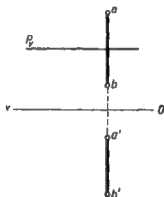
- ٢١٩ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٥٠ - ٤٦٧) .
 ٢٢٠ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي المعين بغير أثره (الشكل
 ٤٦٨ - ٤٧٣) .
 ٢٢١ - أوجد الفصل المشترك للمستوي المعين بالمثلث ABC مع المستوي P ثم
 يبين من أي الأرباع يمر المستقيم المطلوب (الشكل ٤٧٤) .
 ٢٢٢ - أوجد الفصل المشترك للمستوي المعين بمستقيمين متوازيين KL و MN ،
 مع المستوي المعين بمستقيمين متقاطعين AB و AC ، ثم يبين من أي
 الأرباع يمر المستقيم المطلوب (الشكل ٤٧٥) .



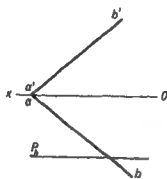
{ ٥٠ } الشكل



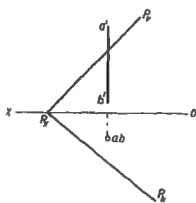
{ ٥١ } الشكل



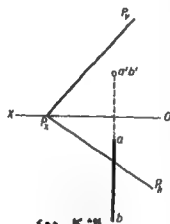
{ ٥٢ } الشكل



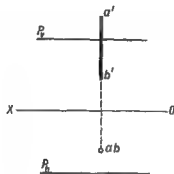
{ ٥٣ } الشكل



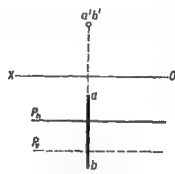
{ ٥٤ } الشكل



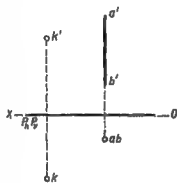
{ ٥٥ } الشكل



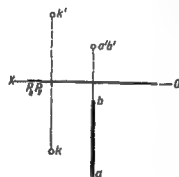
الشكل ٥٦



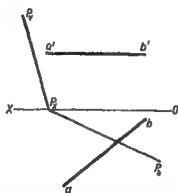
الشكل ٥٧



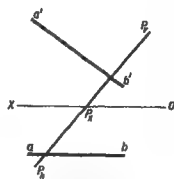
الشكل ٥٨



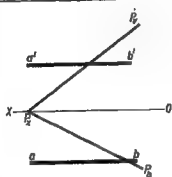
الشكل ٥٩



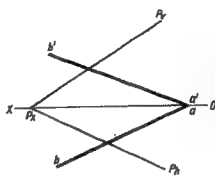
الشكل ٦٠



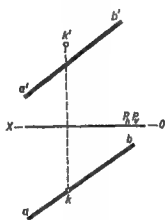
الشكل ٦١



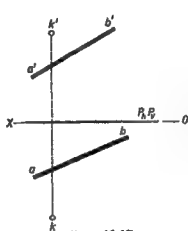
الشكل ٦٢



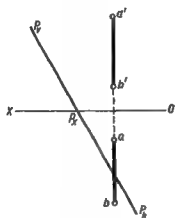
الشكل ٦٣



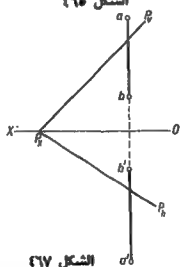
الشكل ٦٤



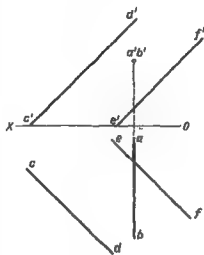
الشكل ٦٥



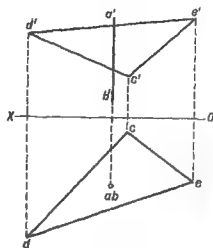
الشكل ٦٦



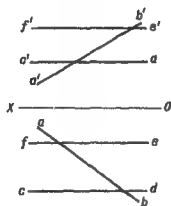
الشكل ٦٧



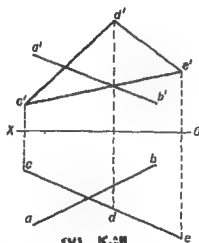
الشكل ٤٦٨



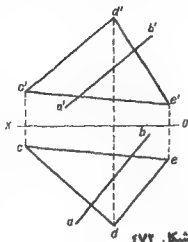
الشكل ٤٦٩



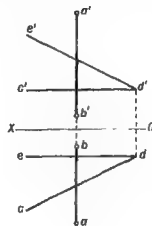
الشكل ٤٧٠



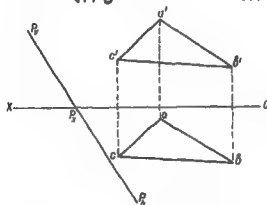
الشكل ٤٧١



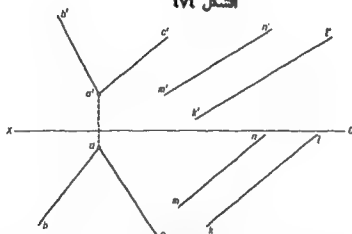
الشكل ٧٢



الشكل ٧٣



الشكل ٧٤



الشكل ٧٥

البحث الخامس عشر

توازي مستقيم مع مستوي

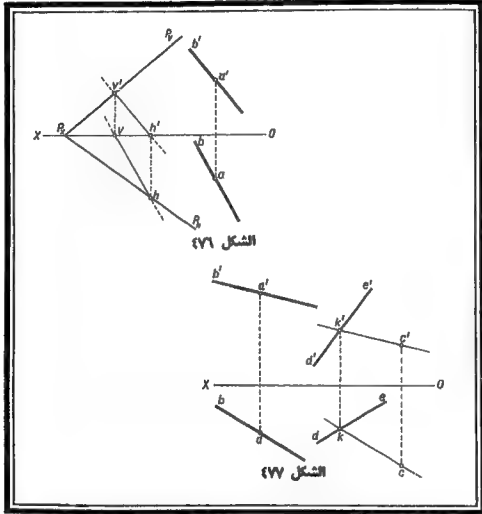
توازي المستويات

يتوازي مستقيم مع مستوي إذا أمكن رسم مستقيم في المستوي يوازي المستقيم المفروض .

يتوازي مستويان P و Q معينان بأثرهما إذا توازي كل من أثريهما المتماثلين .
النظرية العكسية ليست دائماً صحيحة في المجموعة V و H ، مثلاً يتوازي مستويان موازيان لخط الأرض عندما يتوازي أثراهما الجنيان فيما بينها .
إن المستقيمت الرئيسية - الأفقية أو الجبية - لمستويين متوازيين متوازية فيما بينها . يفضل استعمال خاصة المستقيمت الرئيسية هذه لإيضاح توازي مستويين ، عندما لا يعطى أحد المستويين أو كلاهما بأثريهما (إيجاد أثري المستوي ليس ضرورياً) .
يمكن التحقق كذلك من توازي مستويين بمساعدة مستقيمين اختياريين .

أمثلة

● المثال ١٣٩ : لدينا مستوي P ونقطة A . مرور من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي P (الشكل ٤٧٦) .



الحل : لناخذ في المستوي P مستقيماً ما $(hv, h'v')$ ثم نرمم من النقطة (a, a') مستقيماً $(ab, a'b')$ موازياً له . بما أن المستقيم $(hv, h'v')$ معطى في المستوي بصورة كيفية ، بناء عليه فمن النقطة A يمكن أن نرمم مستويات

كثيرة موازية للمستوي P . ولكن من النقطة A يمكن أن نرسم فقط مستقيماً أفقياً واحداً ، ومستقيماً جيبياً واحداً موازياً للمستوي المفروض (لماذا ؟) .

● المثال ١٤٠ : لدينا نقطة A ومستوي - مستقيم DE ونقطة C . مرر من النقطة مستقيماً ما موازياً للمستوي المفروض (الشكل ٤٧٧) .

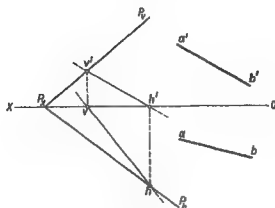
الحل : لتأخذ في المستوي مستقيماً ما $(ck, c'k')$. من النقطة (a, a') نرسم مستقيماً $(ab, a'b')$ موازياً له . (المسألة غير معينة) .

● المثال ١٤١ : لدينا مستوي P ومستقيم AB . هل هما متوازيان فيما بينهما (الشكل ٤٧٨) ؟

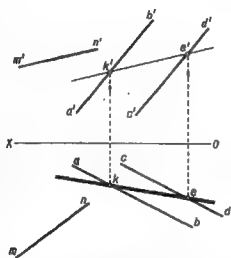
الحل : المستقيم AB يوازي المستوي P إذا أمكننا أن نرسم في هذا المستوي مستقيماً يوازي المستقيم المفروض AB . لترسم المخطط الشاقولي $(h'v')$ لمستقيم واقع في المستوي موازياً لـ $(a'b')$ ، بعد ذلك نوجد مسقطه الأفقي (hv) ، فإذا كان hv يوازي المستقيم ab فإن المستقيم $(ab, a'b')$ سيوازي المستوي P والعكس بالعكس . في المسألة المعطاة المستقيم AB والمستوي P غير متوازيين . يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المخطط الأفقي (hv) للمستقيم .

● المثال ١٤٢ : لدينا مستقيم MN ومستوي معين بمستقيمين متوازيين AB و CD . هل هما متوازيان فيما بينهما (الشكل ٤٧٩) ؟

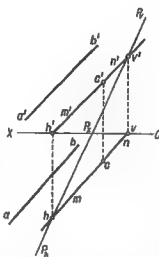
الحل : نرسم المخطط الشاقولي $(e'k')$ لمستقيم مساعد ما واقع في المستوي المفروض موازياً للمستقيم $m'n'$ ، ثم نوجد مسقطه الأفقي (ek) .



الشكل ١٧٨



الشكل ١٧٩



الشكل ١٨٠

با أن المستقيم ($ok, o'k'$) و ($mn, m'n'$) غير متوازيين (لماذا ؟) ،
فالمستقيم المملى والمستوي غير متوازيين .

يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المخطط الأفقي (ok) لمستقيم مساعد ما .

● المثال ١٤٣ : لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرور من النقطة C مستويًا كيفيًا P موازيًا للمستقيم AB بحيث يقع أتراده على استقامة واحدة (الشكل ٤٨٠) .

الحل : لكي يكون المستوي P المار من النقطة C موازيًا للمستقيم AB يجب أن يحوي مستقيمًا موازيًا للمستقيم AB . لنرسم من النقطة (c, c') مستقيمًا $(mn, m'n')$ موازيًا للمستقيم $(ab, a'b')$ ، ولنضمه في مستوي . لهذا نوجد الأترين (h, h') و (v, v') للمستقيم $(mn, m'n')$ ونرسم من النقطتين (h, h') و (v, v') أترين المستوي المطلوب P_1 و P_2 على استقامة واحدة .

ملاحظة : في الحالة العامة إذا لم تعط معلومات إضافية عن وضعية أترين المستوي فالسؤال غير معين . في هذه الحالة نأخذ النقطة P_1 كنقطة ما على خط الأرض .

● المثال ١٤٤ : لدينا مستقيمان AB و CD . مرور من المستقيم AB مستويًا يوازي المستقيم CD (الشكل ٤٨١) .

الحل : لكي يكون المستوي المار من المستقيم AB موازيًا للمستقيم CD يجب أن يحوي على مستقيم موازيًا للمستقيم CD . لنرسم من نقطة ما (k, k') من المستقيم $(ab, a'b')$ مستقيمًا $(mk, m'k')$ موازيًا للمستقيم $(cd, c'd')$. المستقيمان $(mk, m'k')$ و $(ab, a'b')$ يعينان المستوي المطلوب .

بصورة مماثلة يمكن أن نرسم من المستقيم CD مستويًا وحيدًا موازيًا لـ AB . يمكن تعيين هذه المستويات بآثارها ، ولإيجادها يجب أن نستعمل الطريقة المذكورة سابقاً (كيف ؟) .

نتيجة : من مستقيمين متخالفين يمكن أن نرسم مستويين متوازيين وحيدين .

● المثال ١٤٥ : لدينا مستوي P ونقطة إلتقاء أترين المستوي Q الموازي للمستوي P .

ارسم أثري المستوي Q (الشكل ٤٨٢ و ٤٨٣) .

الحل : إن أثري المستوي Q يجب أن يكون موازيين لأثري المستوي P الموافقين .
نرسم من النقطة Q_x الأثرين : $Q_b -$ موازياً لـ P_b و $Q_v -$ موازياً لـ P_v .
● المثال ١٤٦ : لدينا مستوي P ونقطة A . مرور من النقطة A مستوياً Q يوازي المستوي P (الشكل ٤٨٤) .

الحل : إن المستوي المطلوب Q - شاقولي . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (a, a') لذلك وقبل كل شيء نرسم الأثر الأفقي (Q_b) للمستوي من النقطة a موازياً للأثر P_b فيقاطع مع خط الأرض في النقطة Q_x . بعد ذلك نرسم من هذه النقطة الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي موازياً للأثر P_v .
ملاحظة : إذا كانت النقطة Q_x خارج مجال الشكل فنضعها لـ لزوم لرسم الأثر الشاقولي .

● المثال ١٤٧ : لدينا مستوي P ونقطة A . مرور من النقطة A مستوياً Q يوازي المستوي P (الشكل ٤٨٥) .

الحل : إن المستوي المطلوب Q - موازي لخط الأرض . من المعلوم أن الشرط اللازم لتوازي مستويين موازيين لخط الأرض هو توازي أثريهما الجنبيين . لنوجد الأثر الجنبي (P_w) للمستوي P والمسقط الجنبي (a'') للنقطة A . بما أن المستوي Q يجب أن يمر من النقطة (a, a') لذلك نرسم الأثر الجنبي (Q_w) للمستوي Q موازياً للأثر P_w من المسقط الجنبي (a'') للنقطة . بعد ذلك وبعمق Q_w نوجد الأثرين Q_b و Q_v الموازيين لخط الأرض .

ملاحظة : يمكن حل المسألة بدون إستعمال مستوي الاسقاط الجنبي (انظر المثال ١٤٩ - الطريقة الأولى) -

● المثال ١٤٨ : لدينا مستوي P ونقطة A . مرور من النقطة A متوياً Q يوازي المستوي P . (الشكل ٤٨٦) .

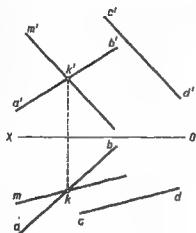
الحل : إن المستوي المطلوب Q كيفي وأثره واقعان على استقامة واحدة .
 بما أن النقطة (a, a') التي يمر منها المستوي Q واقعة في مستوي الإسقاط الأفقي
 لذا يجب أن تقع على الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي . ومنه نرمس من النقطة a
 الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة (Q_x) ، إن
 امتداده هو الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي .

● المثال ١٤٩ : لدينا مستوي P ونقطة A . مرور من النقطة A متوياً Q يوازي المستوي P (الشكل ٤٨٧ - ٤٨٩) .

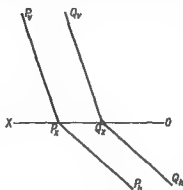
الحل : يتلخص الحل العام لهذه المسألة برسم مستقيم مساعد من النقطة A مواز للمستوي المعطى P . (انظر المثال ١٣٩) ثم بضمه في مستوي يحقق شرط المسألة .

الطريقة الاولى : نأخذ في المستوي P مستقيماً ما (h_v, h'_v) ثم نرمس من النقطة (a, a') مستقيماً يوازيه . بإيجاد الأثرين (h_1, h'_1) و (v_1, v'_1) لهذا المستقيم نرمس منها أثري المستوي المطلوب Q : الأفقي (Q_h) من النقطة h_1 موازياً للأثر P_h ، والشاقولي (Q_v) - من النقطة v'_1 موازياً للأثر P_v . عند حل المسألة بصورة صحيحة أثراً المستوي المطلوب Q_h و Q_v يجب أن يتقاطعا على خط الأرض في النقطة Q_x . من الأسهل حل هذه المسألة بمساعدة المستقيمتين الرئيسيتين للمستوي الأفقية أو الجبلية .

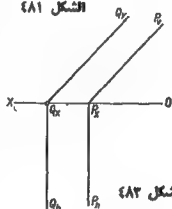
الطريقة الثانية : نرمس من النقطة (a, a') مستقيماً أفقياً في المستوي Q -



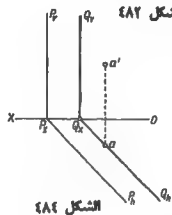
الشكل ٤٨١



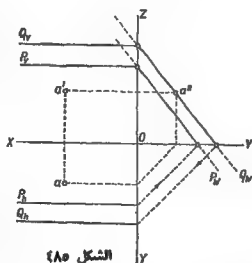
الشكل ٤٨٢



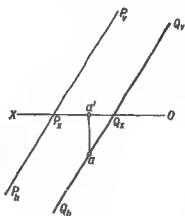
الشكل ٤٨٣



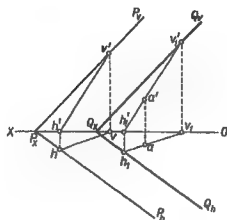
الشكل ٤٨٤



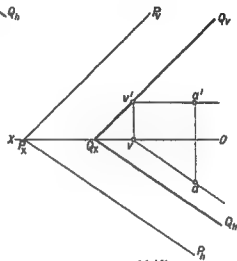
الشكل ٤٨٥



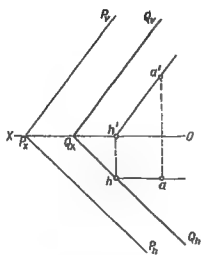
الشكل ٤٨٦



الشكل ٤٨٧



الشكل ٤٨٨



الشكل ٤٨٩

موازيًا لمستقيم أفقي في المستوي P ، فمقطه الأفقي يجب أن يمر من النقطة a موازيًا للأثر P_h ، أما مسقطه الشاقولي فن النقطة a' موازيًا لخط الأرض . بإيجاد الأثر (v, v') لهذا المستقيم الأفقي نرسم أثري المستوي المطلوب : أولاً الأثر الشاقولي (Q_v) من النقطة v' ، موازيًا للأثر P_v فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة Q_x ، بعد ذلك نرسم من هذه النقطة الأثر الأفقي (Q_h) موازيًا للأثر P_h .

الطريقة الثالثة : نمر من النقطة (a, a') مستقيمًا جيبياً في المستوي Q - موازيًا لمستقيم جيبى ما في المستوي P . إن مسقطه الأفقي يجب أن يمر من النقطة a موازيًا لخط الأرض ، أما مسقطه الشاقولي فن النقطة a' موازيًا للأثر P_v . بإيجاد الأثر (h, h') لهذا المستقيم الجيبى نرسم أثري المستوي المطلوب : الأثر الأفقي (Q_h) - من النقطة h موازيًا للأثر P_h فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة Q_x ، بعد ذلك من هذه النقطة - الأثر الشاقولي (Q_v) موازيًا للأثر P_v .

ملاحظة : ١ . من النقطة المفروضة يمكن أن نرسم مستقيمًا أفقيًا وآخر جيبياً في المستوي المطلوب دون رسم هذه المستقيمتين في المستوي المعطى (لماذا ؟) .
٢ . أحياناً عند استعمال مستقيم أفقي أو جيبى نخرج النقطة Q_x من حدود الشكل ، في هذه الحالة نرسم أثري المستوي Q_h و Q_v بغض النظر عن النقطة Q_x ، لهذا نستعمل مستقيم أفقي وآخر جيبى .

● **المثال ١٥٠ :** لدينا نقطة A ومستوي معين بمستقيم BC ونقطة D . مرر من النقطة A مستويًا يوازي المستوي المفروض (الشكل ١٩٠) .

الحل : نحول المستوي المفروض المعطى بمستقيم ونقطة إلى مستوي معين

بستقيمين متقاطعين DE و BC . نرر من النقطة (a, a') المستقيمين $(am, a'm')$ و $(an, a'n')$ الموازيين على التوالي للمستقيمين $(bc, b'c')$ و $(de, d'e')$. وهكذا يتعين المستوي المطلوب بالمستقيمين المتقاطعين AM و AN . يمكن تعيين هذا المستوي بأثره (كيف ؟) .

● **المثال ١٥١ :** لدينا نقطة A ومستوي معين بستقيمين متوازيين DE و BC . مرر من النقطة A مستوياً يوازي المستوي المفروض (الشكل ٤٩١) .

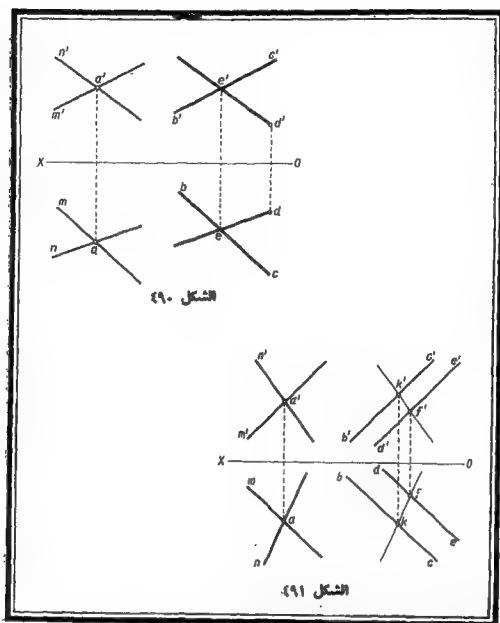
الحل : نرمس مستقيماً ما $(fk, f'k')$ في المستوي المفروض (لماذا ؟) بعد ذلك نرمس من النقطة (a, a') المستقيمين $(am, a'm')$ و $(an, a'n')$ الموازيين للمستقيمين $(bc, b'c')$ أو $(de, d'e')$ و $(fk, f'k')$.

● **المثال ١٥٢ :** لدينا مثلث ABC ومستوي P . هل يوازي مستوي المثلث المستوي P (الشكل ٤٩٢) ؟

الحل : يمكن حل المسألة بطريقتين :

الطريقة الأولى : نوجد أولاً أثري مستوي المثلث ، ثم باستخدام نظرية توضع الآثار المتألفة لمستويين نين وضعية هذين المستويين .

الطريقة الثانية : استناداً إلى امكانية رسم مستقيمتين متوازيين في المستويات المتوازية ، نرمس مستقيماً أفقياً اختيارياً في المستوي P وآخر في مستوي المثلث ، فإذا توازى المستقيمان الأفقيان نرمس مستقيمين آخرين جهيين في نفس المستويين السابقين . إذا كان المستقيمان الجهيان أيضاً متوازيين فالمستويان سيكونان متوازيين . أما إذا كان المستقيمان الرئيسيان (الأفقيان أو الجهيان) غير متوازيين عندها نكف

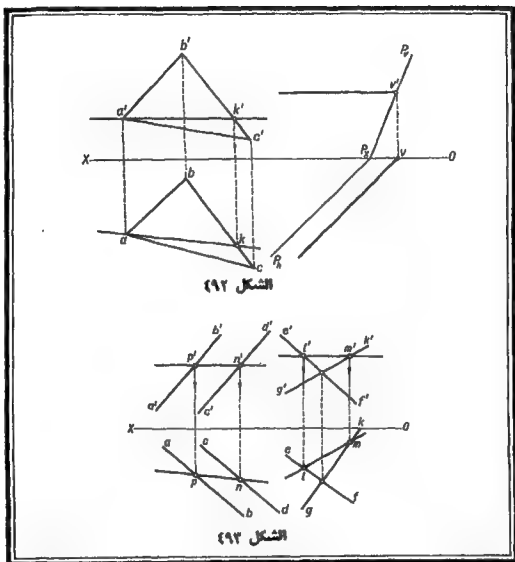


عن حل المسألة لوضح عدم توازي المستويين .

في هذه المسألة نلاحظ أن المستوي P ومستوي المثلث غير متوازيين فيما بينهما.

ملاحظة : من الشكل نلاحظ أنه يمكن عدم رسم مستقيم أفقي (جبهتي)

(لماذا) ؟

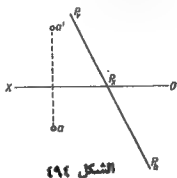


• المثال ١٥٣ : هل المستويان التاليان متوازيان ؟ الاول معين بمستقيمين متوازيين AB و CD والثاني معين بمستقيمين متقاطعين EF و GK (الشكل ١٩٣).

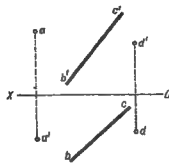
الحل : نحل المسألة بدون إيجاد آثار المستويين . نضم في المستويين المفروضين مستقيمين ما ألقين . بما أن المستقيمين الألقين في المستويين غير متوازيين فالمستويان غير متوازيين .

مسائل

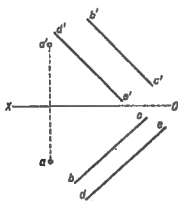
- ٢٢٣ - مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي P (الشكل ١٩٤) .
- ٢٢٤ - مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي المعين بمستقيم BC ونقطة D (الشكل ١٩٥) .
- ٢٢٥ - مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين BC و DE (الشكل ١٩٦) .
- ٢٢٦ - مرر من النقطة A مستقيماً يوازي مستوي المثلث BCD (الشكل ١٩٧) .
- ٢٢٧ - مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي P ويميل على مستويات الإسقاط بقدار واحد (الشكل ١٩٨) .
- ٢٢٨ - هل المستقيم AB والمستوي P متوازيان (الشكل ١٩٩) ؟
- ٢٢٩ - هل المستقيم AB والمستوي المعين بمستقيم CD ونقطة K متوازيان (الشكل ٥٠٠) ؟
- ٢٣٠ - هل المستقيم AB والمستوي المعين بمستقيمين متوازيين CD و EF متوازيان (الشكل ٥٠١) ؟
- ٢٣١ - هل المستقيم AB ومستوي المثلث CDE متوازيان (الشكل ٥٠٢) ؟



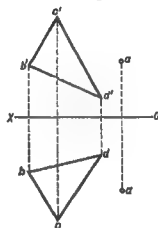
الشكل ٤٩٤



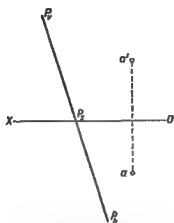
الشكل ٤٩٥



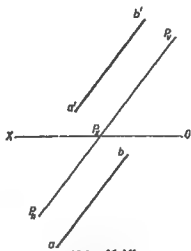
الشكل ٤٩٦



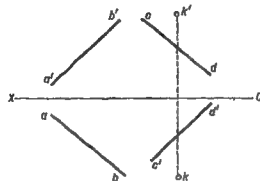
الشكل ٤٩٧



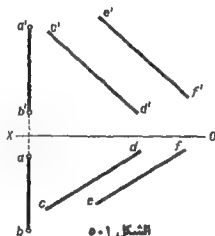
الشكل ٤٩٨



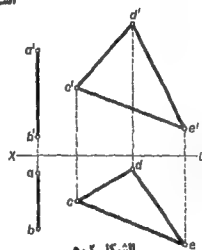
الشكل ٤٩٩



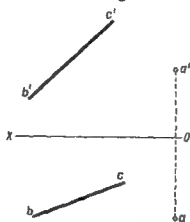
الشكل ٥.٠



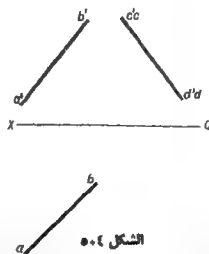
الشكل ٥.١



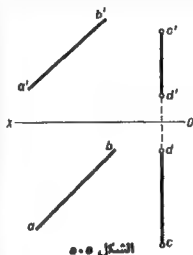
الشكل ٥.٢



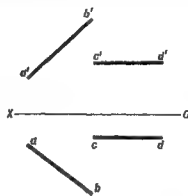
الشكل ٥.٣



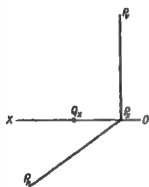
الشكل ٥.٤



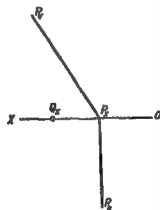
الشكل ٥.٥



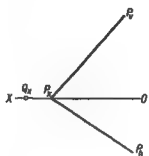
الشكل ٥.٦



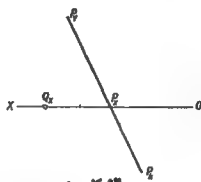
الشكل ٥.٧



الشكل ٥.٨



الشكل ٥.٩



الشكل ٥.١٠

ش Q_1 _____

X _____ B

P_1 Q_1 _____

الشكل ٥١١

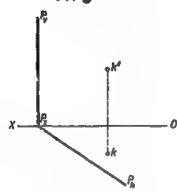
P_2 _____

Q_2 _____

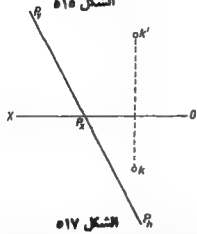
X _____ O

Q_1 _____

الشكل ٥١٢



الشكل ٥١٥



الشكل ٥١٧

Q_1 _____

Q_2 _____

X _____ O

P_1 _____

P_2 _____

الشكل ٥١٢

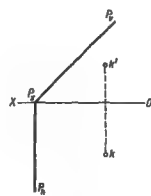
P_2 _____

X _____ O

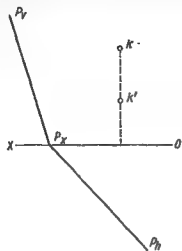
P_1 _____

Q_1 _____

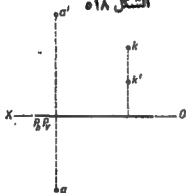
الشكل ٥١٤



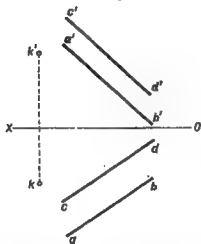
الشكل ٥١٦



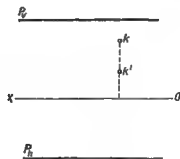
الشكل ١٨



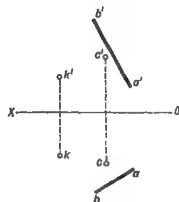
الشكل ٢٠



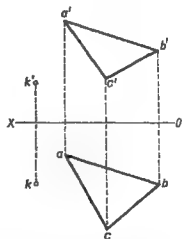
الشكل ٢٢



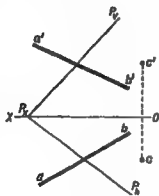
الشكل ١٩



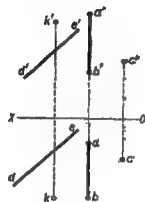
الشكل ٢١



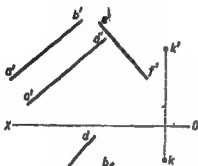
الشكل ٢٣



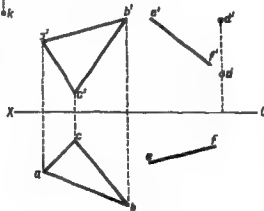
الشكل ٢٤



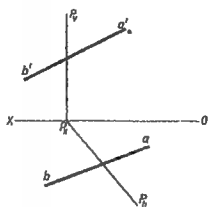
الشكل ٢٥



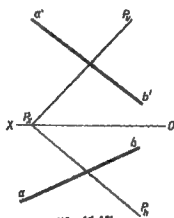
الشكل ٢٦



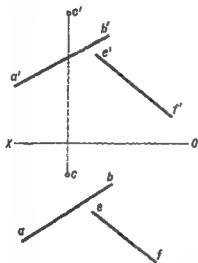
الشكل ٢٧



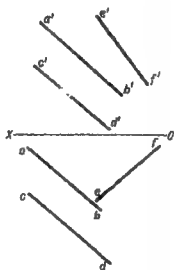
الشكل ٢٨



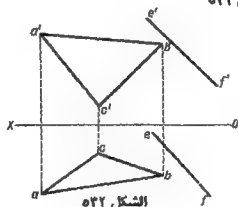
الشكل ٢٩



الشكل ٣٠



الشكل ٣١



الشكل ٣٢

٢٣٢ - مرر من النقطة A مستويًا Q عمودياً على مستوى الإسقاط الأفقي وموازيًا للمستقيم BC (الشكل ٥٠٣) .

٢٣٣ - مرر من المستقيم AB مستويًا P يوازي المستقيم CD (الشكل ٥٠٤) .

٢٣٤ - مرر من المستقيمين AB و CD مستويين متوازيين P و Q (الشكل ٥٠٥، ٥٠٦) .

٢٣٥ - أرسم أثري المستوي Q الموازي للمستوي P إذا عرفت نقطة لثقاء أثريه Q_x (الشكل ٥٠٧ - ٥١٠) .

٢٣٦ - يبين حل المستويان P و Q متوازيان (الشكل ٥١١، ٥١٢) ؟

١ - باستعمال مستوى الإسقاط الجني .

٢ - بدون استعمال مستوى الإسقاط الجني .

٢٣٧ - أوجد الأثر الناقص للمستوي Q من شرط توازي المستويين P و Q فيما بينها (الشكل ٥١٣، ٥١٤) :

١ - باستعمال مستوى الإسقاط الجني .

٢ - بدون استعمال مستوى الإسقاط الجني .

٢٣٨ - أرسم أثري مستوي يمر من النقطة K ويوازي المستوي P (الشكل ٥١٥ - ٥١٨) .

٢٣٩ - أرسم أثري مستوي يمر من النقطة K ويوازي المستوي P (الشكل ٥١٩، ٥٢٠) .

١ - باستعمال مستوى الإسقاط الجني .

٢ - بدون استعمال مستوى الإسقاط الجني .

٢٤٠ - مرر من النقطة K مستويًا يوازي المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٥٢١) .

٢٤١ - مرر من النقطة K مستويًا يوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٥٢٢) .

٢٤٢ - مرر من النقطة K مستويًا يوازي مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٢٣) .

ملحوظة : في المائل ٢٤١، ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٤، ٢٤٥، ٢٤٦، ٢٤٧، ٢٤٨، ٢٤٩، ٢٥٠ ارسم المستوي المنشود بأثره وبدونها .

٢٤٣ - مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويوازي المستوي P (الشكل ٥٢٤) .

٢٤٤ - مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويوازي المستوي المعين بمستقيم DE ونقطة K (الشكل ٥٢٥) .

٢٤٥ - مرر من النقطة K مستقيماً يقع المستقيم EF ويوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٥٢٦) .

٢٤٦ - مرر من النقطة D مستقيماً يقطع المستقيم EF ويوازي مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٢٧) .

٢٤٧ - ارسم مستويًا (P) يوازي المستوي P بحيث أن طول قطعة المستقيم AB المحصورة بين المستويين يساوي 20 mm (الشكل ٥٢٨ ، ٥٢٩) .

٢٤٨ - ارسم مستويًا P يوازي المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بحيث أن طول قطعة المستقيم EF المحصورة بين المستويين يساوي 26 mm (الشكل ٥٣٠) .

٢٤٩ - ارسم مستويًا P يوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بحيث يكون طول قطعة المستقيم EF المحصورة بين المستويين مساوياً 30 mm (الشكل ٥٣١) .

٢٥٠ - ارسم مستويًا P يوازي مستوي المثلث ABC بحيث يكون طول قطعة المستقيم EF المحصورة بين المستويين مساوياً 30 mm (الشكل ٥٣٢) .

البحث السادس عشر

تعامد مستقيم مع مستوي

تعامد المستويات

إذا كان المستقيم عمودياً على مستوي معين بأثره فسقط هذا المستقيم سينعكس مع الأثرين الموافقين للمستوي. بالإضافة إلى ذلك المسقط الأفقي للمستقيم عمودي على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي لذلك المستوي (لماذا ؟) ، كما أن المسقط الشاقولي للمستقيم عمودي على المسقط الشاقولي للمستقيم الجانبي لذلك المستوي (لماذا ؟).
إن خاصية مساقط المستقيمت الرئيسية للمستوي التعامد مع مستقيم تستعمل لـ :

١ - توضيح تعامد مستقيم مع مستوي غير معطى بأثره بدون تعيين أثري ذلك المستوي .

٢ - إسقاط عمود من نقطة على مستوي غير معطى بأثره .

النظرية العكسية ليست دائماً صحيحة في الجملة (H, V) .

إستثناء : يكون المستقيم عمودياً على مستوي يوازي خط الأرض إذا كان أيضاً المسقط الجانبي للمستقيم عمودياً على الأثر الجانبي للمستوي .

تعامد المستويان Q و P إذا كان المستوي P حاوياً على مستقيم عمودي على المستوي Q .

أمثلة

● المثال ١٥٤ : لدينا مستوي P ونقطة A . أسقط من النقطة A عموداً على المستوي P (الشكل ٥٣٣) .

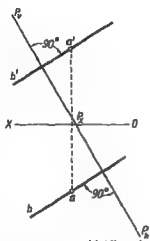
الحل : نرسم من مسطبي النقطة المفروضة (a, a') مسطبي المستقيم المطلوب بصورة عمودية على الأثرين الموافقين للمستوي أي $ab \perp P_b$ و $a'b' \perp P_{b'}$.

● المثال ١٥٥ : لدينا مستوي P ونقطة A . أسقط من النقطة A عموداً على المستوي P (الشكل ٥٣٤) .

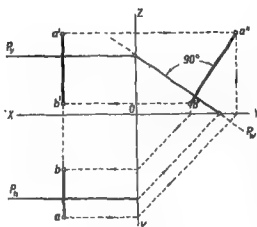
الحل : لأن المستقيم المطلوب جنبي مسقطه يجب أن يرا من مسطبي النقطة الموافقين (a, a') ، كما يجب أن يكونا عمودين على الأثرين الموافقين للمستوي . ولكن يجب أن لا ننسى أن لأي مستقيم جنبي حتى ولو كان غير عمودي على مستوي موازي لخط الأرض يكون المسقط الأفقي والشافولي على الخط دائماً عمودين على أثري المستوي .

لهذا يجب أن نبدأ حل المسألة بمساعدة مستوي الإسقاط الجنبي لنؤمن الوضعية العمودية للمسقط الجنبي للمستقيم المطلوب بالنسبة للأثر الجنبي للمستوي ، بعد ذلك بمساعدة المسقط الجنبي للمستقيم نوجد مسطبه الآخرين . وهكذا نعين الأثر الجنبي (P_w) للمستوي ، والمسقط الجنبي (a'') للنقطة . نسقط عموداً من a'' على الأثر P_w ثم نحدد المسقط الجنبي للمستقيم بقطعة ما $a''b''$ بعدها نعين المسطبين الآخرين : الأفقي (ab) والشافولي $(a'b')$.

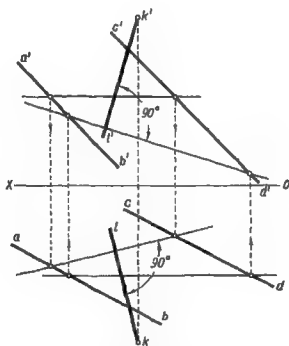
● المثال ١٥٦ : لدينا مستوي معين بمستقيمين متوازيين AB و CD ونقطة K . أسقط عموداً من النقطة K على ذلك المستوي (الشكل ٥٣٥) .



الشكل ٢٣



الشكل ٢٤



الشكل ٢٥

الحل : نرمم أولاً مستقيماً أفقياً ما وآخرجهياً في المستوي المفروض . بعد ذلك نرمس مسطلي العمود : الأفقي (kl) من النقطة k عمودياً على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي (لماذا؟) والشافولي $k'l'$ من النقطة k' عمودياً على المسقط الشافولي للمستقيم الجبهي (لماذا؟) .

● **المثال ١٥٧ :** لدينا مستوي P ونقطة A . عن بعد النقطة عن المستوي (الشكل ٥٣٦) .

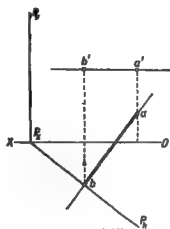
الحل : من المعلوم أن بعد نقطة عن مستوي يقاس بقطعة العمود المحصورة بين النقطة وأساس العمود على المستوي . نسقط عموداً من النقطة (a, a') على المستوي P ونوجد نقطة الأساس (b, b') أي نقطة تقاطع العمود مع المستوي بما أن القطعة ($ab, a'b'$) موازية لمستوي الإسقاط الأفقي فالمسقط الأفقي (ab) سيعطينا الطول الحقيقي .

نتيجة : يقاس البعد بين نقطة ما ومستوي شافولي (على الخطوط) بالبعد بين المسقط الأفقي للنقطة والأثر الأفقي للمستوي . بصورة مشابهة يمكن أن نستنتج مايلي :

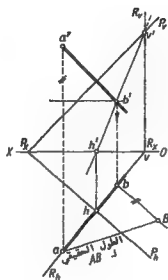
١ - يقاس بعد نقطة ما عن مستوي أمامي (على الخطوط) بالبعد بين المسقط الشافولي للنقطة والأثر الشافولي للمستوي .

٢ - يقاس بعد نقطة ما عن مستوي موازي لخط الأرض (على الخطوط) بالبعد بين المسقط الجبهي للنقطة والأثر الجبهي للمستوي .

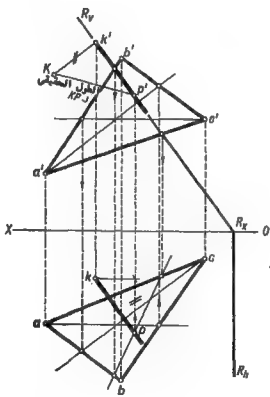
● **المثال ١٥٨ :** لدينا مستوي P ونقطة A . عن البعد بين النقطة والمستوي (الشكل ٥٣٧) .



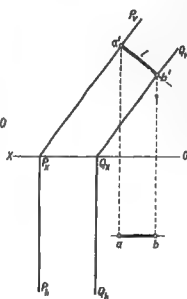
الشكل ٢٦



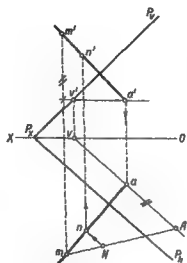
الشكل ٢٧



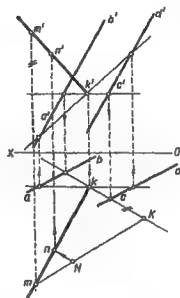
الشكل ٢٨



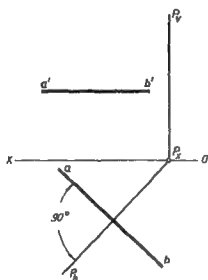
الشكل ٢٩



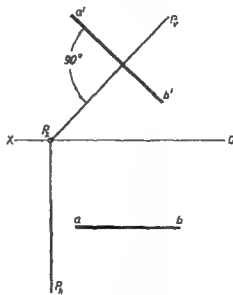
الشكل ٤٠



الشكل ٤١



الشكل ٤٢



الشكل ٤٣

الحل : نسط من النقطة (a, a') عموداً على المستوي P ثم نوجد أساسه على المستوي ، لهذا نبعث عن النقطة (b, b') نقطة تقاطع العمود مع المستوي .
بتعيين مسطبي القطعة $(ab, a'b')$ ، نعين طولها الحقيقي .

● **المثال ١٥٩ :** لدينا مثلث ABC ونقطة K . عين بعد النقطة عن مستوي المثلث (الشكل ٥٣٨) .

الحل : نسط من النقطة المفروضة (k, k') عموداً على مستوي المثلث (انظر المثال ١٥٦) ثم نوجد النقطة (p, p') أساس العمود ونعين الطول الحقيقي لقطعة العمود $(kp, k'p')$.

● **المثال ١٦٠ :** لدينا مستويان متوازيان P و Q . عين البعد بينهما (الشكل ٥٣٩) .

الحل : نتلخص فكرة الحل بأخذ نقطة ما على أحد المستويين ثم تعيين بعدها عن المستوي الآخر (انظر المثال ١٥٧) .

نتيجة : يقاس البعد بين مستويين أماميين متوازيين (على المخطط) بالبعد بين أثريهما الشاقولين

بصورة مشابهة يقاس البعد بين مستويين شاقولين متوازيين (على المخطط) بالبعد بين أثريهما الأفقيين .

يقاس البعد بين مستويين موازيين لحط الأرض (على المخطط) بالبعد بين أثريهما الجنيين .

● **المثال ١٦١ :** لدينا مستوي P ونقطة A من هنا المستوي (معينة بمسقطها الشاقولي) .
لذرفع من النقطة A عموداً على المستوي طوله lmm (الشكل ٥٤٠) .

الحل : نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة المفروضة ، مثلاً بمساعدة مستقيم

أفقي . ثم نرمس مسقطي العمود على المستوي من النقطة (a, a') . بتحديد قطعة منه $(am, a'm')$ نرمس هذه القطعة بطولها الحقيقي ثم نأخذ عليها قطعة AN بطول lmm وبعد ذلك نوجد مسقطها $(an, a'n')$.

● المثال ١٦٢ : لدينا مستوي معين بمستقيم AB ونقطة C ، ولدينا أيضاً نقطة K من هذا المستوي (معينة بمسقطها الأفقي) . ارفع من النقطة K عموداً على المستوي طوله lmm . (الشكل ٥٤١) .

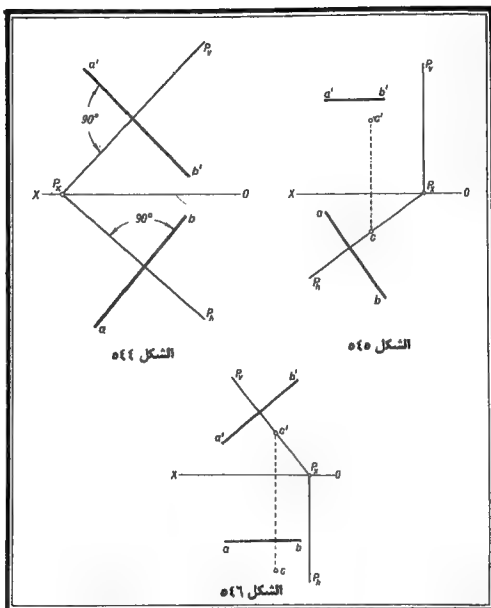
الحل : نحول المستوي المفروض إلى مستوي معين بمستقيمين متوازيين AB و CD . لنوجد بمساعدة مستقيم جهي المقطع الشاقولي (k') للنقطة المفروضة ، بعد ذلك نرمس من النقطة (k, k') مستقيماً أفقياً في المستوي ثم نرمس مسقطي العمود : الأفقي ... عمودياً على المقطع الأفقي للمستقيم الأفقي ، والشاقولي - عمودياً على المقطع الشاقولي للمستقيم الجهي للمستوي . نحدد العمود بقطعة $(km, k'm')$ ونرسم هذه القطعة بطولها الحقيقي ثم نأخذ عليها قطعة KN تساوي lmm . بعد ذلك نوجد مسقطها $(kn, k'n')$.

● المثال ١٦٣ : لدينا مستقيم AB ونقطة P_2 . ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٥٤٢) .

الحل : المستوي المطلوب شاقولي . نرمس أثريه من النقطة P_2 : الأفقي (P_2) - عمودياً على المستقيم ab ، والشاقولي (P_2) - عمودياً على المستقيم $a'b'$.

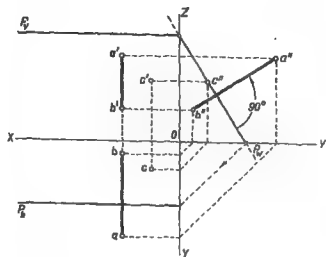
● المثال ١٦٤ : لدينا مستقيم AB ونقطة P_2 . ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٥٤٣) .

الحل : المستوي المطلوب أمامي . نرمس أثريه من النقطة P_2 : الأفقي (P_2) -

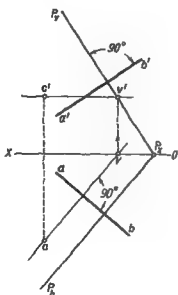


مودياً على المستقيم $a'b$ ، والناقلي (P_v) - عمودياً على المستقيم $a'b'$.

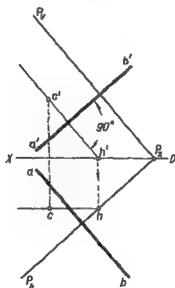
● المثال ١٦٥: لدينا مستقيم AB ونقطة P_z . ارم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ١٤٤)



الشكل ٧



الشكل ٨



الشكل ٩

الحل : المستوي المطلوب كفي . نرمم أثره من P_x : الأفقي (P_h) -
عمودياً على المستقيم ab والشافوي (P_v) - عمودياً على المستقيم $a'b'$.

● **المثال ١٦٦ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من النقطة C مستويًا P عمودياً على المستقيم AB (الشكل ٥٤٥) .

الحل : المستوي المطلوب شافوي . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (c,c') لذلك نرمم أولاً أثره الأفقي (P_h) من النقطة c - عمودياً على المستقيم ab فيقاطع مع خط الأرض في النقطة P_x ، بعد ذلك نرمم الأثر الشافوي (P_v) من هذه النقطة عمودياً على المستقيم $a'b'$.

ملاحظة : إذا خرجت النقطة P_x من حدود الشكل فعندها لازم لرسم الأثر الشافوي للمستوي (لماذا ؟) .

● **المثال ١٦٧ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من النقطة C مستويًا P عمودياً على المستقيم AB (الشكل ٥٤٦) .

الحل : المستقيم المطلوب أمامي . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (c,c') لذلك نرمم أولاً أثره الشافوي (P_v) من النقطة c' عمودياً على المستقيم $a'b'$ فيقطع خط الأرض في النقطة P_x . بعد ذلك نرمم الأثر الأفقي (P_h) من تلك النقطة عمودياً على المستقيم ab .

ملاحظة : إذا خرجت النقطة P_x من حدود الشكل فعندها لازم لرسم الأثر الأفقي للمستوي (لماذا ؟) .

● **المثال ١٦٨ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من هذه النقطة مستويًا P عمودياً على المستقيم AB (الشكل ٥٤٧) .

الحل : المستوي المطلوب موازي لخط الأرض . نوجد المقطع الجنبى ($a'b'$) المستقيم ، والمقطع الجنبى (c') للنقطة . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (c, c') لذلك نرمم الأثر الجنبى (P_b) للمستوي من النقطة c' عمودياً على المستقيم $a'b'$ ، بعد ذلك نوجد الأثرين الآخرين (P_v و P_b) للمستوي بمساعدة P_v .

● المثال ١٦٩ : لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرور من النقطة مستوياً P مودياً على المستقيم (الشكل ٥٤٨ ، ٥٤٩) .

الحل : الطريقة الأولى : لنرسم مسطوي مستقيم أفقي ما في المستوي المطلوب من المسقطين الموازيين للنقطة المفروضة : الشاقولي من النقطة c' موازياً لخط الأرض والأفقي من النقطة c عمودياً على المستقيم ab .

ييجاد الأثر (v, v') للمستقيم الأفقي نرمم أثري المستوي : أولاً الشاقولي (P_v) من النقطة v' عمودياً على المستقيم $a'b'$ فيقطع خط الأرض في P_v ، بعد ذلك الأفقي (P_b) من النقطة P_v عمودياً على مستقيم ab .

الطريقة الثانية : نرمم مسطوي مستقيم جيبى ما في المستوي P من مسطوي النقطة المفروضة : الأفقي من النقطة c موازياً لخط الأرض والشاقولي من النقطة c' عمودياً على المستقيم $a'b'$. ييجاد الأثر (h, h') للمستقيم الجيبى نرمم أثري المستوي : أولاً الأفقي (P_b) من النقطة h عمودياً على المستقيم ab فيقطع خط الأرض في النقطة P_b ، بعد ذلك الشاقولي (P_v) من النقطة P_b عمودياً على المستقيم $a'b'$.

ملاحظة : أحياناً عند استعمال مستقيم أفقي أو جيبى نخرج النقطة P_v من حدود الشكل . في هذه الحالة نرمم أثري المستوي P_v و P_b كلا على انفراد ولهذا نستعمل مستقيماً جيبياً وآخر أفقياً .

● **المثال ١٧٠ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . أسقط من النقطة C عموداً على المستقيم AB (الشكل ٥٥٠) .

عندما يكون المستقيم المقروص موازياً لأحد مستويات الإسقاط (أفقياً أو جيبياً) فإنه يمكننا أن نسط عموداً من النقطة على المستقيم بصورة مباشرة . أما في الحالة العامة فإنا نحل المسألة بالشكل التالي :

نرسم من النقطة المقروضة (c, c') مستويًا P عمودياً على المستقيم $(ab, a'b')$ ثم نوجد نقطة تقاطعها (k, k') . المستقيم المار من النقطة (c, c') و (k, k') هو المستقيم المطلوب .

ملاحظة : اتعين بعد النقطة C عن المستقيم AB ينبغي تعيين طول القطعة CK .

● **المثال ١٧١ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستويًا R عمودياً على المستوي المقروص (الشكل ٥٥١) .

الحل : إذا تطلب أن يكون المستوي R عمودياً على المستوي P فيجب أن يحتوي على مستقيم عمودي على ذلك المستوي . نرمم من النقطة (a, a') مستقيماً عمودياً على المستوي P ونضمه في المستوي R فنحصل على مستوي عمودي على المستوي المقروص (المسألة غير معينة) .

نتيجة : يكون المستوي المار من نقطة والعمودي على مستوي آخر وحيداً إذا كان المستوي المطلوب شاقولياً أو أمامياً أو كيفياً ذا أثرين واقعين على استقامة واحدة (لماذا) ؟

● المثال ١٧٢ : لدينا مستقيم BA ومستوي P . مرر من المستقيم AB مستويًا عمودياً على المستوي المقروض P (الشكل ٥٥٢) .

الحل : من نقطة ما (k, k') من المستقيم المقروض نسلط عموداً على المستوي P .
المستقيمان المتقاطعان $(ak, a'k')$ و $(km, k'm')$ يعينان المستوي المنشود .

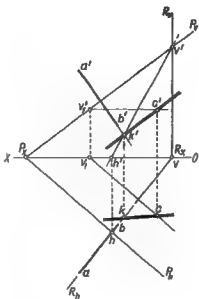
● المثال ١٧٣ : لدينا مستقيم DE ومستوي معين بمستقيم AB ونقطة C .
مرر من المستقيم مستويًا عمودياً على المستوي المقروض (الشكل ٥٥٣) .

الحل : نرمس من النقطة C مستقيماً أفقياً وآخر جيئاً في المستوي ، ثم نسلط من نقطة ما (k, k') من المستقيم عموداً على المستوي . لهذا نرمس من النقطة k مستقيماً kf عمودياً على المسبق الأفقي للمستقيم الأفقي ثم نرمس من k' مستقيماً $k'f'$ عمودياً على المسقط الشاقولي للمستقيم الجيئ . المستوي المطلوب معين بالمستقيمين المتقاطعين $(kf, k'f')$ و $(od, e'd')$.

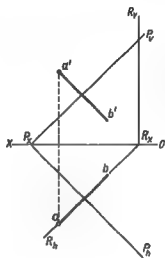
● المثال ١٧٤ : لدينا مستوي P . أنشئ المثل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي المعين P بمقدار $l = 40 \text{ mm}$. (الشكل ٥٥٤) .

الحل : المثل الهندسي المطلوب عبارة عن مستوي يوازي المستوي المقروض ويبعد عنه بمقدار $l = 40 \text{ mm}$. ومنه نستنتج طريقة الإنشاء :

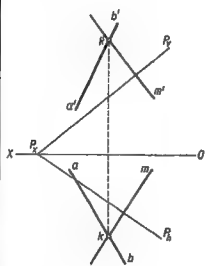
- ١ - نأخذ نقطة ما على المستوي المقروض .
 - ٢ - نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي .
 - ٣ - نأخذ على هذا العمود قطعة بطول $l = 40 \text{ mm}$ (يكفي إعطاء حل واحد) .
 - ٤ - نرمس من نهاية العمود مستويًا يوازي المستوي المقروض .
- على الطالب أن يقوم بعملية الإنشاء لوحده .



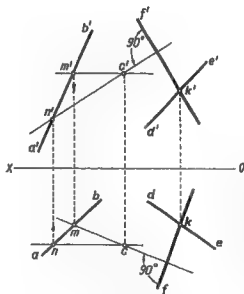
الشكل ١٠٠



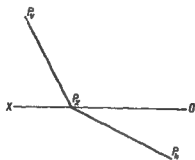
الشكل ١٠١



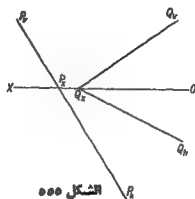
الشكل ١٠٢



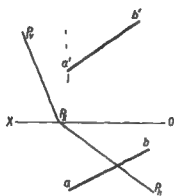
الشكل ١٠٣



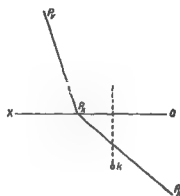
الشكل ١٠٠٤



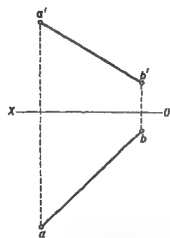
الشكل ١٠٠٥



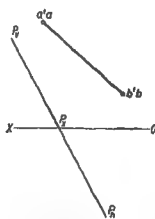
الشكل ١٠٠٦



الشكل ١٠٠٧



الشكل ١٠٠٨



الشكل ١٠٠٩

● **المثال ١٧٥ :** أنشئ الحل الهندسي لجميع النقاط في المستوي P التي تبعد عن المستوي Q بمقدار $l = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٥٥٥) .

الحل : الحل الهندسي المطلوب هو مستقيم تقاطع المستوي P مع المستوي الموازي للمستوي المقروض Q والذي يبعد عنه بمقدار l . ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - نأخذ على المستوي Q نقطة ما .
- ٢ - نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي Q .
- ٣ - نأخذ على هذا العمود قطعة طولها $l = 40 \text{ mm}$ (يكفي حل واحد) .
- ٤ - نرمس من نهاية العمود مستويّاً R يوازي Q .
- ٥ - نوجد الفصل المشترك للمستويين P و R الذي يشكل الحل الهندسي المطلوب .

● **المثال ١٧٦ :** أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٥٥٦) .

الحل : إن النقطة المطلوبة هي نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي الموازي للمستوي P والذي يبعد عنه بمقدار $l = 40 \text{ mm}$. ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - نأخذ على المستوي المقروض نقطة ما .
- ٢ - نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي .
- ٣ - نأخذ على هذا العمود قطعة طولها $l = 40 \text{ mm}$ (يكفي حل واحد)
- ٤ - نرمس من نهاية العمود مستويّاً R يوازي P .
- ٥ - نوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي R .

● **المثال ١٧٧ :** أوجد المقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٥٥٧) .

الحل : نوجد المسقط المطلوب للنقطة K كسقط ناقص لنقطة من المستوي R الموازي للمستوي المفروض والذي يبعد عنه بقدر $l = 40 \text{ mm}$. ومنه طريقة الإنشاء :

١ - نأخذ في المستوي المفروض نقطة ما .

٢ - نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي .

٣ - نأخذ على العمود قطعة طولها $l = 40 \text{ mm}$ (يكفي حل واحد) .

٤ - نرمس من نهاية العمود مستويًا R موازي المستوي P .

٥ - بواسطة المسقط المفروض للنقطة K من المستوي R نوجد المسقط الآخر .

● **المثال ١٧٨ :** انشئ المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ المتساوية الأبعاد عن نهايتي القطعة AB (الشكل ٥٥٨) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب هو مستوي عمودي على القطعة ويمر من منتصفها ومنه نستنتج طريقة الإنشاء :

١ - ن نصف القطعة بالنقطة K .

٢ - نرمس من هذه النقطة مستويًا عمودياً على القطعة المفروضة .

● **المثال ١٧٩ :** انشئ المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوي P والمتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٥٥٩) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب هو مستقيم تقاطع المستوي P مع المستوي R العمودي على القطعة AB والمار من منتصفها .

ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - ن نصف القطعة بالنقطة K .
- ٢ - نرسم من هذه النقطة مستويًا R عمودياً على القطعة المفروضة .
- ٣ - نوجد الفصل المشترك للمستويين P و R .

● المثال ١٨٠ : أوجد على المستقيم CD نقطة متساوية البعد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٥٦٠) .

الحل : النقطة المطلوبة هي نقطة تقاطع المستقيم CD مع المستوي R العمودي على القطعة AB ، والمار من منتصفها .

ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - ن نصف القطعة بالنقطة K .
- ٢ - نرسم من هذه النقطة مستويًا R عمودياً على القطعة المفروضة .
- ٣ - نوجد نقطة تقاطع المستقيم CD مع المستوي R .

● المثال ١٨١ : أوجد المسقط الناقص للنقطة K المتساوية البعد عن نهائي القطعة AB (الشكل ٥٦١) .

الحل : نعين المسقط المطلوب للنقطة K كمسقط ناقص لنقطة من المستوي R العمودي على القطعة AB والمار من منتصفها .

ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - ن نصف القطعة AB بالنقطة M .

٢ - نمر من هذه النقطة مستويًا R عمودياً على القطعة المفروضة .

٣ - نوجد المسقط الآخر للنقطة K من المستوي R بمساعدة المسقط المفروض.

● المثال ١٨٢ : أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة K بمقدار

$l = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٥٦٢) .

الحل : في الحالة العامة لدينا نقطتان M و N تحقّقان الطلب تقعان في رأسي

مثلث متساوي الساقين KMN قاعدته MN واقعة على المستقيم AB .

ومنه طريقة الإنشاء :

١ - نسط من النقطة K عموداً على المستقيم AB ونوجد النقطة D - أساس

العمود .

٢ - نعين الطول الحقيقي للإرتفاع KD ونشيء على حدة مثلثاً مساعداً

بالأطوال الحقيقية KMN وبساقين طول كل منها $l = 40 \text{ mm}$.

٣ - نأخذ على المستقيم AB واعتباراً من النقطة D القطعتين DM و DN . النقطتان

M و N هما النقطتان المطلوبتان .

ماهي الحالات الممكنة الأخرى ؟

● المثال ١٨٣ : مرر من النقطة K مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية معلومة

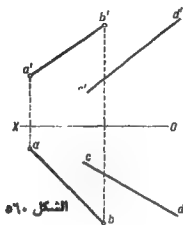
و (الشكل ٥٦٢) .

الحل : هناك مستقيمان يحقّقان الطلب KM و KN وهما عبارة عن ساقين مثلث

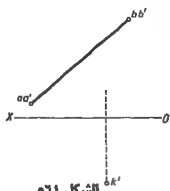
متساوي الساقين KMN قاعدته MN واقعة على المستقيم AB وزاوية قاعدته و .

ومنه طريقة الإنشاء :

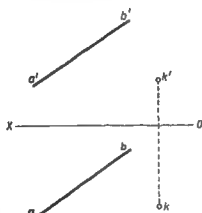
١ - نسط من النقطة K عموداً على المستقيم AB ونوجد النقطة D - أساس العمود .



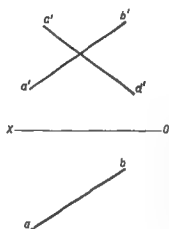
الشكل ٥٦٠



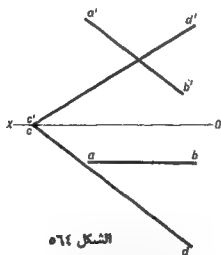
الشكل ٥٦١



الشكل ٥٦٢



الشكل ٥٦٣



الشكل ٥٦٤

٢ - نوجد الطول الحقيقي للإرتفاع KD ثم نرمم على حدة مثلثاً مساعداً KMN بأطواله الحقيقية ويزوايا قاعدته φ .

٣ - نأخذ على المستقيم AB إعتباراً من النقطة D القطعتين DM و DN ثم نرمم المستقيمين من النقاط M, K و N, K .

● المثال ١٨٤ : أوجد المسقط الناقص للمستقيم CD القاطع للمستقيم AB على أن يكون المستقيمان متعامدين فيما بينهما (الشكل ٥٦٣) .

الحل : المثل الهندسي لجميع مستقيمت الفراغ التي تتعامد مع مستقيم ما وتقطعه ، هو مستوي R عمودي على هذا المستقيم ويمر من نقطة تقاطع المستقيمت .
نوجد المسقط المطلوب للمستقيم CD كمسقط ناقص لمستقيم ما واقع في المستوي R .
ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - نوجد مسطبي نقطة تقاطع المستقيمين .
 - ٢ - ثم نمر من هذه النقطة مستويّاً R عمودياً على المستقيم AB .
 - ٣ - نوجد المسقط الآخر بمساعدة المسقط المعلوم المستقيم الواقع في المستوي R .
- المثال ١٨٥ : عين البعد بين مستقيمين متخالفين AB و CD (الشكل ٥٦٤) .

الحل : البعد بين مستقيمين متخالفين هو البعد بين مستويين متوازيين مارين من هذين المستقيمين أو هو البعد بين أحد المستقيمين والمستوي المار من المستقيم الآخر والموازي للمستقيم الأول . ومنه طريقة الإنشاء :

- ١ - نرمم من المستقيم AB مستويّاً موازياً للمستقيم CD .
- ٢ - نأخذ على CD نقطة ما K .

٣- نعين بعد هذه النقطة عن المستوي .

ملاحظة : وفق الطريقة السابقة يمكننا أن نعين فقط البعد بين المستقيمين المتخالفين المفروضين ولكن دون معرفة وضعية أقصر بعد بينها .

مسائل

٢٥١ - أسقط من النقطة K عموداً على المستوي P (الشكل ٥٦٥ - ٥٦٩) .

٢٥٢ - أسقط من النقطة K عموداً على مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٧٠، ٥٧١) .

٢٥٣ - أسقط من النقطة K عموداً على مستوي المستقيمين التوازيين AB و CD (الشكل ٥٧٢) .

٢٥٤ - أسقط من النقطة K عموداً على المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٥٧٣) .

٢٥٥ - عيّن بعد النقطة K عن المستوي P (الشكل ٥٦٥ - ٥٦٩) .

٢٥٦ - عيّن بعد النقطة K عن مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٧٠، ٥٧١) .

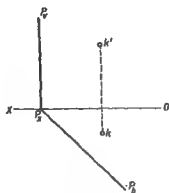
٢٥٧ - عيّن بعد النقطة K عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٥٧٢) .

٢٥٨ - عيّن بعد النقطة K عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٥٧٣) .

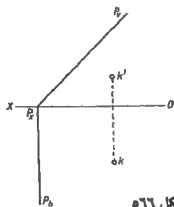
٢٥٩ - عيّن البعد بين المستويين المتوازيين P و Q (الشكل ٥٧٤ - ٥٧٧) .

٢٦٠ - عيّن البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٥٧٨) .

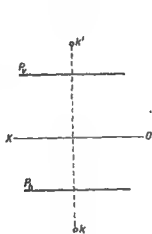
٢٦١ - عيّن الأثر الناقص للمستوي P على أن يكون بعده عن النقطة K 15 mm (الشكل ٥٧٩ - ٥٨١) .



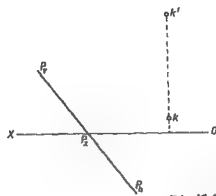
الشكل ٥٦٥



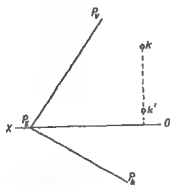
الشكل ٥٦٦



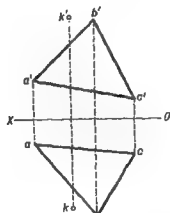
الشكل ٥٦٧



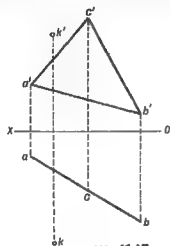
الشكل ٥٦٨



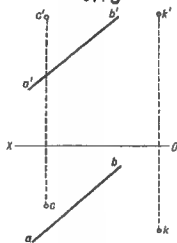
الشكل ٥٦٩



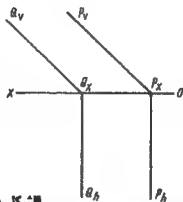
الشكل ٥٧٠



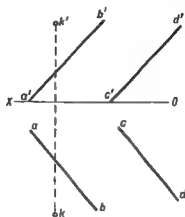
الشكل ٧١



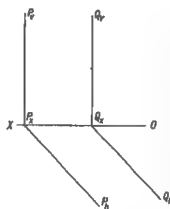
الشكل ٧٣



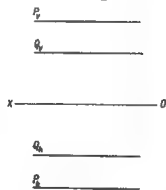
الشكل ٧٥



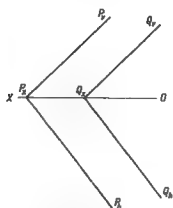
الشكل ٧٦



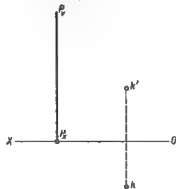
الشكل ٧٧



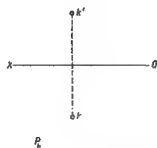
الشكل ٧٨



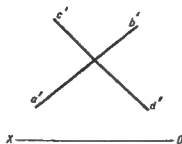
الشكل ٧٧



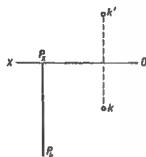
الشكل ٧٩



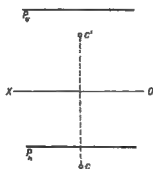
الشكل ٨١



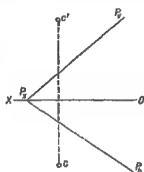
الشكل ٧٨



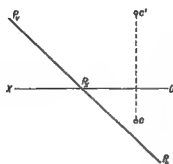
الشكل ٨٠



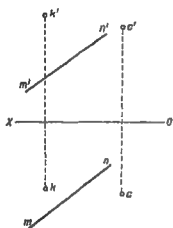
الشكل ٨٢



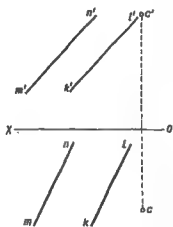
الشكل ٨٢



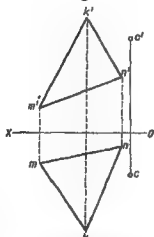
الشكل ٨٤



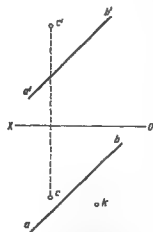
الشكل ٨٥



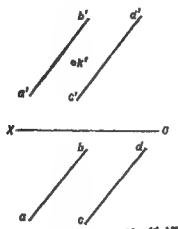
الشكل ٨٦



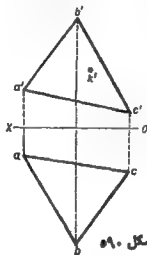
الشكل ٨٧



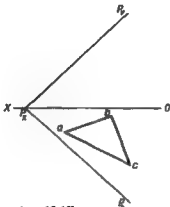
الشكل ٨٨



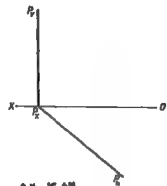
الشكل ٨٩



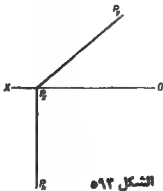
الشكل ٩٠



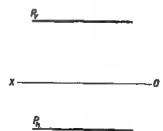
الشكل ٩١



الشكل ٩٢



الشكل ٩٣



الشكل ٩٤

٢٦٢ - ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي P (الشكل ٥٨٢ - ٥٨٤) .

٢٦٣ - ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي المعين بمستقيم MN ونقطة K (الشكل ٥٨٥) .

٢٦٤ - ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي المعين بمستيمين متوازيين MN و LK (الشكل ٥٨٦) .

٢٦٥ - ارسم من النقطة C كرة تمس مستوي المثلث KMN (الشكل ٥٨٧) .

٢٦٦ - لرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40 \text{ mm}$ على المستوي P إذا كان السقط الأفقي للنقطة K من المستوي معلوماً (الشكل ٥٥٧) .

٢٦٧ - لرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40 \text{ mm}$ على المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C ، إذا كانت السقط الأفقي للنقطة K معلوماً (الشكل ٥٨٨) .

٢٦٨ - لرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40 \text{ mm}$ على المستوي المعين بمستيمين متوازيين AB و CD إذا كان السقط الشاقولي للنقطة K من المستوي معلوماً (الشكل ٥٨٩) .

٢٦٩ - لرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40 \text{ mm}$ على مستوي المثلث ABC إذا كان السقط الشاقولي للنقطة K من مستوي المثلث معلوماً (الشكل ٥٩٠) .

٢٧٠ - ارسم مسطبي موشور ثلاثي قائم ، قاعدته ABC واقعة في المستوي

P إذا علم المخطط النهائي للقاعدة ، وارتفاعه $h = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٥٩١) .

٢٧١ - ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوى P بمقدار $l = 20 \text{ mm}$ (الشكل ٥٩٢ - ٥٩٧) .

٢٧٢ - ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوى المعين بمستقيم AB ونقطة C بمقدار $l = 30 \text{ mm}$ (الشكل ٥٩٨) .

٢٧٣ - ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوى المعين بمستقيمين متوازيين AB و DC بمقدار $l = 30 \text{ mm}$ (الشكل ٥٩٩) .

٢٧٤ - ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ التي تبعد عن متوي المثلث ABC بمقدار $l = 30 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٠) .

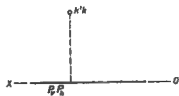
٢٧٥ - ارسم في المستوى Q المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوى P بمقدار $l = 30 \text{ mm}$ (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤) .

٢٧٦ - ارسم في المستوى المعين بمستقيم AB ونقطة C ، المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوى P بمقدار $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠١) .

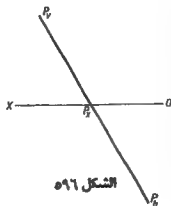
٢٧٧ - ارسم في المستوى المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوى P بمقدار $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٢) .

٢٧٨ - ارسم في متوي المثلث ABC المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوى P بمقدار $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٣) .

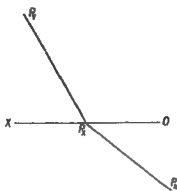
٢٧٩ - ارسم في المستوى P المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن



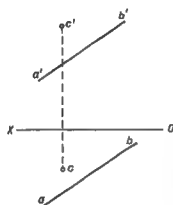
الشكل ٩٥



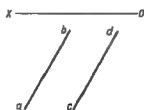
الشكل ٩٦



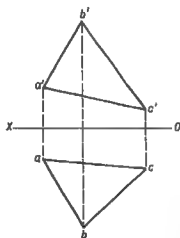
الشكل ٩٧



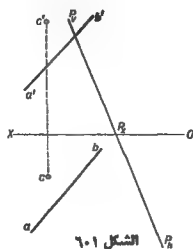
الشكل ٩٨



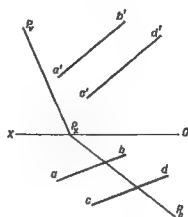
الشكل ٩٩



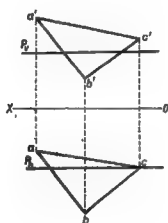
الشكل ١٠٠



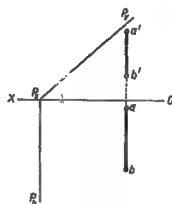
الشكل ٦.١



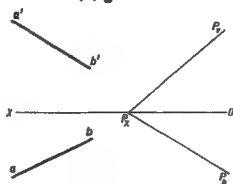
الشكل ٦.٢



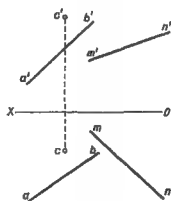
الشكل ٦.٣



الشكل ٦.٤



الشكل ٦.٥



الشكل ٦.٦

المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بقدر $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠١) .

٢٨٠ - ارسم في المستوي P المثل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بقدر $l = 80 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٢) .

٢٨١ - ارسم في المستوي P المثل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن مستوي المثلث ABC بقدر $l = 20 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٣) .

٢٨٢ - أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن المستوي P بقدر $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٤ ، ٦٠٥) .

٢٨٣ - أوجد على المستقيم MN نقطة تبعد عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بقدر $l = 20 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٦) .

٢٨٤ - أوجد على المستقيم MN نقطة تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بقدر $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٧) .

٢٨٥ - أوجد على المستقيم MN نقطة تبعد عن مستوي المثلث ABC بقدر $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٨) .

٢٨٦ - عين المسقط الناقص للنقطة A التي تبعد عن المستوي P بقدر $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦٠٩ - ٦١٢) .

٢٨٧ - عين المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بقدر $l = 30 \text{ mm}$ (الشكل ٦١٣) .

٢٨٨ - عين المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بقدر $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦١٤) .

٢٨٩- عين المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن مستوي المثلث ABC بمقدار $l = 25 \text{ mm}$ (الشكل ٦١٥) .

٢٩٠- ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB إذا أعطيت نقطة وإلتقاء الأثرين لهذا المستوي (الشكل ٦١٦ - ٦١٩) .

٢٩١- ارسم الأثر الناقص للمستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٦٢٠ ، ٦٢١) .

٢٩٢- ارسم أثري مستوي يمر من النقطة C ويتعامد مع المستقيم AB (الشكل ٦٢٢ - ٦٢٤) .

٢٩٣- هل المستقيمان AB و CD متعامدان (الشكل ٦٢٥) ؟

٢٩٤- عين المسقط الناقص للمستقيم CD الذي يتقاطع مع المستقيم AB بزاوية 90° (الشكل ٥٦٣) .

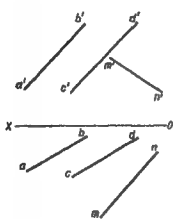
٢٩٥- مرر من النقطة A مستويًا عمودياً على المستويين P و Q (الشكل ٦٢٦) .

٢٩٦- ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٥٥٨ - ٦٢٧) .

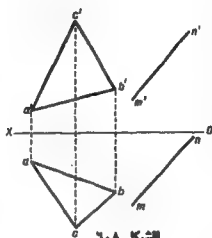
٢٩٧- ارسم في المستوي P المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٦٢٨) .

٢٩٨- ارسم في المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة MN (الشكل ٦٢٩) .

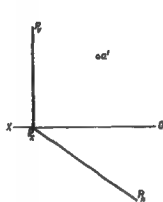
٢٩٩- ارسم في المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD المحل الهندسي



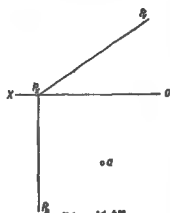
الشكل ٦٠٧



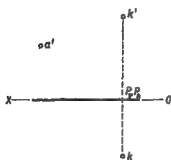
الشكل ٦٠٨



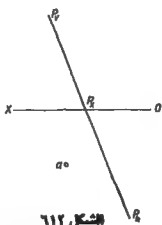
الشكل ٦٠٩



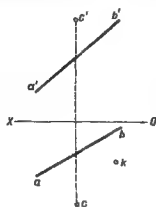
الشكل ٦١٠



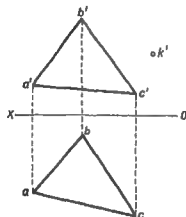
الشكل ٦١١



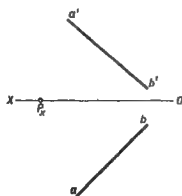
الشكل ٦١٢



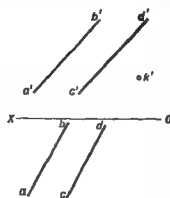
الشكل ٦١٣



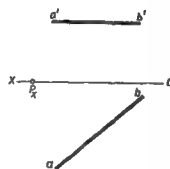
الشكل ٦١٥



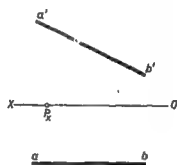
الشكل ٦١٧



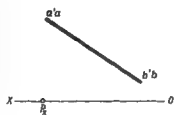
الشكل ٦١٤



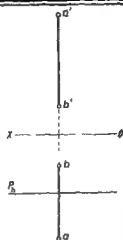
الشكل ٦١٦



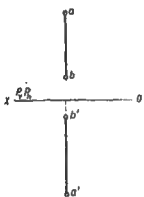
الشكل ٦١٨



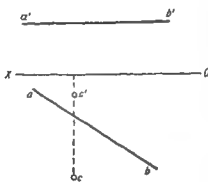
الشكل ٦١٩



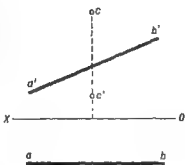
الشكل ٦٢٠



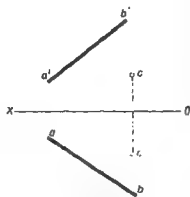
الشكل ٦٢١



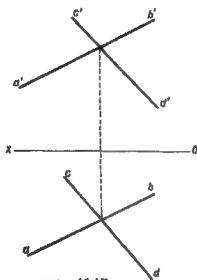
الشكل ٦٢٢



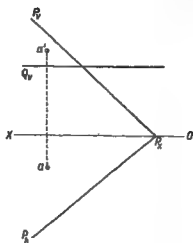
الشكل ٦٢٣



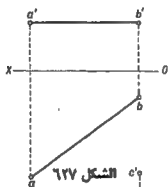
الشكل ٦٢٤



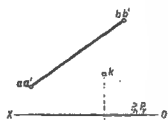
الشكل ٦٢٥



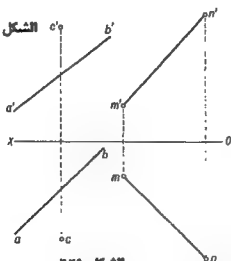
الشكل ٦٢٦



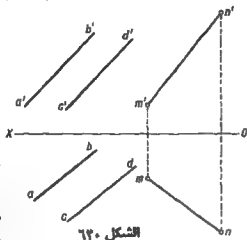
الشكل ٦٢٧



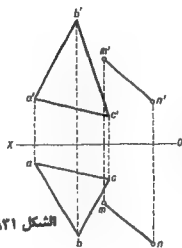
الشكل ٦٢٨



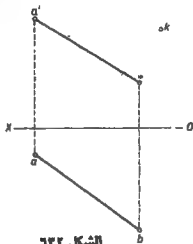
الشكل ٦٢٩



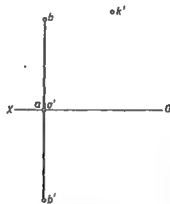
الشكل ٦٢٠



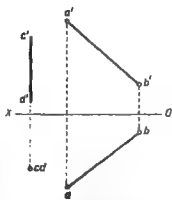
الشكل ٦٢١



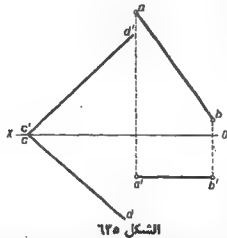
الشكل ٦٢٢



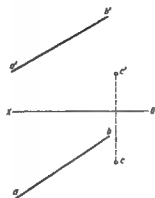
الشكل ٦٢٣



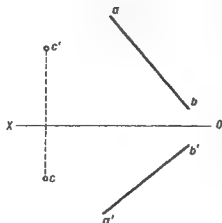
الشكل ٦٢٤



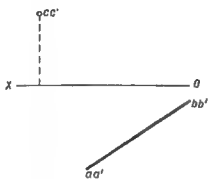
الشكل ٦٢٥



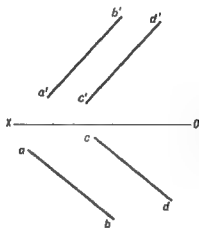
الشكل ٦٣٦



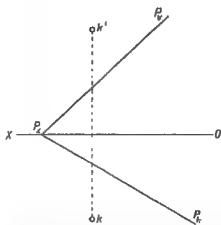
الشكل ٦٣٧



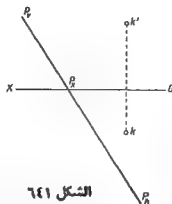
الشكل ٦٣٨



الشكل ٦٣٩



الشكل ٦٤٠



الشكل ٦٤١

جميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة MN (الشكل ٦٣٠) .

٣٠٠ - ارسم في مستوي المثلث ABC المثل الهندسي لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة MN (الشكل ٦٣١) .

٣٠١ - أوجد المسقط الناقص للنقطة K المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٦٣٢ ، ٦٣٣) .

٣٠٢ - أوجد على المستقيم CD نقطة متساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٦٣٤ ، ٦٣٥) .

٣٠٣ - أسقط من النقطة C عموداً على المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ - ٦٣٨) .

٣٠٤ - عين بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ - ٦٣٨) .

٣٠٥ - أنشئ كرة مركزها في النقطة C وتمس المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ - ٦٣٨) .

٣٠٦ - عين البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٦٣٩) .

٣٠٧ - أوجد نقطة على المستقيم AB تبعد عن النقطة C بمقدار $l = 30 \text{ mm}$ ماهي الحالات الممكنة (الشكل ٦٣٦) ؟

٣٠٨ - مرور من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية 45° . ماهو عدد المستقيمتين الممكنة (الشكل ٦٣٧) ؟

٣٠٩ - مرور من النقطة K بصورة عمودية على المستوي P :

١ - مستويًا شاقوليًا R (الشكل ٦٤٠) .

٣ - مستويًا أماميًا S (الشكل ٦٤١) .

٣١٠ - مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي المعطى بمستقيم AB

ونقطة C مستويًا شاقوليًا R (الشكل ٦٤٢) .

٣١١ - مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي المعين بمستقيمين

متوازيين AB و CD مستويًا أماميًا S (الشكل ٦٤٣) .

٣١٢ - مرر من النقطة K بصورة عمودية على مستويي المثلث ABC مستويًا

S يوازي خط الأرض (الشكل ٦٤٤) .

٣١٣ - مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي P مستويًا كيفيًا Q

ذا أثرين على استقامة واحدة (الشكل ٦٤٥) .

٣١٤ - مرر من المستقيم AB مستويًا عمودياً على المستوي P (الشكل

٦٤٦ ، ٦٤٧) .

٣١٥ - مرر من المستقيم MN مستويًا عمودياً على المستوي المعين بمستقيم

AB ونقطة C (الشكل ٦٤٨) . ارسم المستوي بأثره .

٣١٦ - مرر من المستقيم MN مستويًا عمودياً على المستوي المعين بمستقيمين

متوازيين AB و CD (الشكل ٦٤٩) . ارسم المستوي بأثره .

٣١٧ - مرر من المستقيم MN مستويًا عمودياً على مستويي المثلث ABC (الشكل

٦٥٠) . ارسم المستوي بأثره .

٣١٨ - ارسم مثلثًا متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN

إذا كان طول ساق المثلث مساوياً 1.25 من إرتفاعه (الشكل ٦٥١) .

٣١٩ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقع على المستقيم MN إذا كان طولها مساوياً 1.5 من إرتفاع المثلث (الشكل ٦٥١) .

٣٢٠ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت زاوية القاعدة تساوي 30° (الشكل ٦٥١) .

٣٢١ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٣٢٢ - ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول الوتر مساوياً 1.25 من إرتفاعه (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٣ - ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة C مساوية 30° (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٤ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، وتره BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٣٢٥ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٦ - ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت مساحته تساوي $1.5 AB^2$ (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٧ - ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت نسبة ضلعيه 1:5 (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٨ - ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN (الشكل

٦٥٢) .

٣٢٩ - ارسم مربعاً ABCD قطره BD واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٣٣٠ - ارسم متوازي أضلاع ABCD قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة B تساوي 60° ، وطول قطره AC أكبر بمقدار 5 mm من ضلعه الجانبي (الشكل ٦٥١) .

٣٣١ - ارسم متوازي أضلاع ABCD قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه الجانبي مساوياً $1\frac{25}{2}$ من ارتفاعه ، وكانت النسبة بين ضلعيه مساوية 2 (الشكل ٦٥١) .

٣٣٢ - ارسم معيناً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه مساوياً 1.2 من إرتفاعه (الشكل ٦٥١) .

٣٣٣ - ارسم معيناً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN إذا كانت زاويته الحادة B تساوي 60° (الشكل ٦٥١) .

٣٣٤ - ارسم معيناً ABCD قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN إذا كانت نسبة قطريه تساوي 2 (الشكل ٦٥١) .

٣٣٥ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا كان : $AB=AD$ ، $DC=1.15AB$ (الشكل ٦٥٢) .

٣٣٦ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا كان : $BC = \frac{3}{2} AB=AD$ (الشكل ٦٥٢) .

٣٣٧ - ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على

المستقيم MN إذا علم أن $AB = AD$ وأن الزاوية C تساوي 45°
(الشكل ٦٥٢) .

٣٣٨ - ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا علم أن $AB = AD = DC = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٦٥١) .

٣٣٩ - ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت زاوية الحادة تساوي 45° وكانت قاعدته الصغرى تساوي ضلعه الجانبي المائل (الشكل ٦٥١) .

٣٤٠ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا علم أن ساقه أكبر من ارتفاعه AD بمقدار 10 mm (الشكل ٦٥١) .

٣٤١ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت النقطة K أساساً لارتفاعه (الشكل ٦٥٣) .

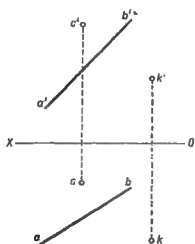
٣٤٢ - ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كان نصف قطر الدائرة المرسومة من رؤوس المثلث مساوياً $0.75 AB$
(الشكل ٦٥١) .

٣٤٣ - ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم BM إذا كانت نسبة ضلعيه تساوي 2 (الشكل ٦٥٤) .

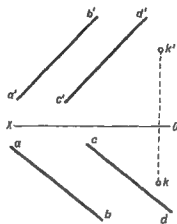
٣٤٤ - ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٣٤٥ - ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم BM (الشكل ٦٥٤) .

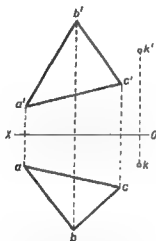
٣٤٦ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم



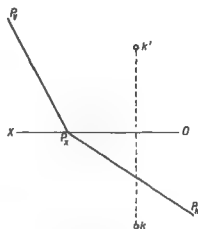
الشكل ٦٤٢



الشكل ٦٤٣

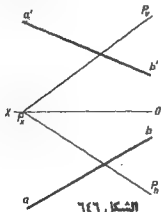


الشكل ٦٤٤

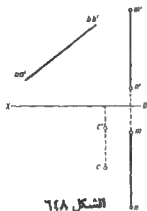


الشكل ٦٤٥

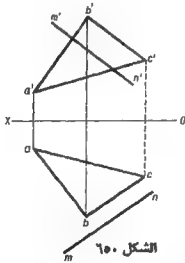
MN إذا كانت النقطة K أساساً لارتفاعه وتقسّم الضلع بنسبة $1:2$ وذلك
 بالإتجاه من النقطة B نحو النقطة C وكانت الزاوية $B = 60^\circ$
 (الشكل ٦٥٣) .



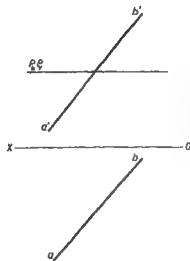
الشكل ٦٤٦



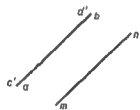
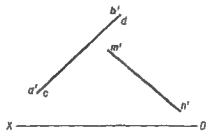
الشكل ٦٤٨



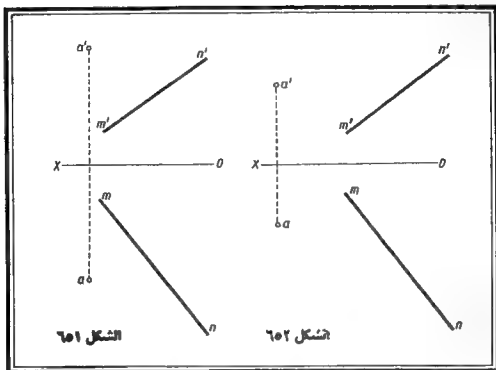
الشكل ٦٥٠



الشكل ٦٤٧



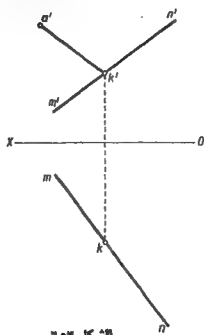
الشكل ٦٤٩



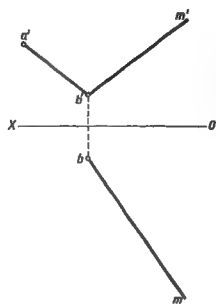
٣٤٧- ارسم معيناً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه يساوي 1,2 من ارتفاعه (الشكل ٦٥١) .

٣٤٨- ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM إذا كانت $CD = 1,2 AB$ ، $AB = AD$ ، $B = 90^\circ$ (الشكل ٦٥٤) .

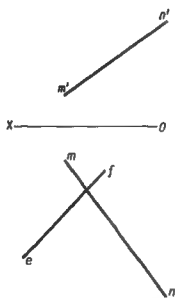
٣٤٩- ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN وضلعه المائل AB واقع على المستقيم EF إذا كانت الزاوية $C = 45^\circ$ والزاوية $B = 90^\circ$ ، $AB = AD = 40 \text{ mm}$ (الشكل ٦٥٥) .



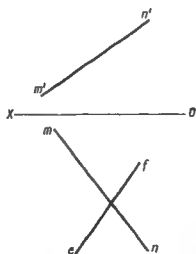
الشكل ٦٥٢



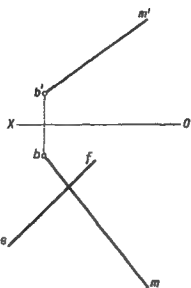
الشكل ٦٥٤



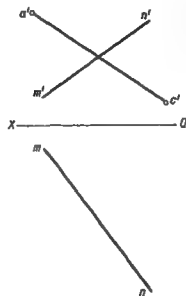
الشكل ٦٥٥



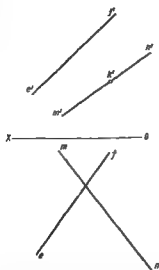
الشكل ٦٥٦



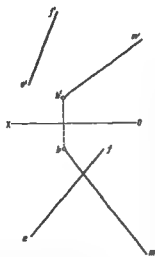
الشكل ٦٥٧



الشكل ٦٥٨



الشكل ٦٥٩



الشكل ٦٦٠

٣٥٠ - ارسم معيناً ABCD قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN إذا كان قطره الصغير مساوياً 40 mm وواقعاً على المستقيم EF ، وكانت مساحة المعين مساوية AC^2 (الشكل ٦٥٦) .

٣٥١ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ضلعه BC يساوي 60 mm ويقع على المستقيم BM إذا كان ارتفاع متوازي الأضلاع AK واقعاً على المستقيم EF وكان طول ضلعه الجانبي مساوياً 40 mm (الشكل ٦٥٧) .

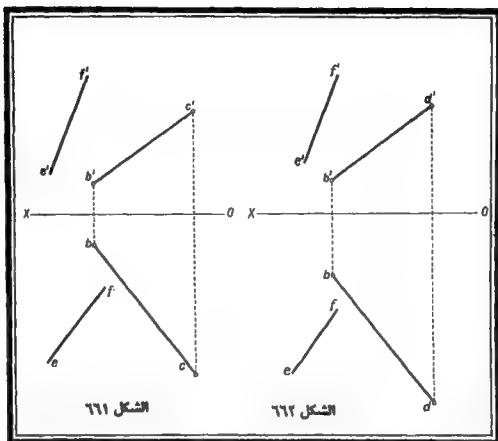
٣٥٢ - ارسم مربعاً ABCD قطره BD واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٨) .
٣٥٣ - ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كان ضلعه AB يساوي 40 mm وواقعاً على المستقيم EF وكانت نسبة ضلعي المستطيل مساوية 1,5 (الشكل ٦٥٥) .

٣٥٤ - ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه القائم AB مساوياً 30 mm وواقعاً على المستقيم EF وكانت مساحة المثلث مساوية $0,75 AB^2$ (الشكل ٦٥٥) .

٣٥٥ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC تساوي 50 mm وتقع على المستقيم MN إذا كان الرأس H واقعاً على المستقيم EF العمودي على المستقيم MN (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٦ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان ارتفاعه AD مساوياً 40 mm وواقعاً على المستقيم EF (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٧ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم



MN إذا كان إرتقاعه AD مساوياً 40 mm وواقعاً على المستقيم EF ،
وكانت زاوية قاعدته تساوي 30° (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٨ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته $BC = 60 \text{ mm}$ واقعة
على المستقيم MN ، إذا كان رأسه A واقعاً على المستقيم EF العمودي
على MN وكان إرتقاعه مساوياً 40 mm (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٩ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته \overline{BC} واقعة على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كانت النقطة K أساساً لإرتقاعه AK وكان ساقه مساوياً $AK_{1,15}$ (الشكل ٦٥٩) .

٣٦٠ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كانت النقطة K أساساً لإرتقاعه AK (الشكل ٦٥٩) .

٣٦١ - ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم BM ورأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٢ - ارسم متطيلاً ABCD ضلعه الكبير AC واقع على المستقيم BM ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كان قطره مساوياً AB_2 (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٣ - ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم BM ورأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٤ - ارسم مربعاً ABCD قطره BD واقع على المستقيم MN إذا كان رأسه A واقعاً على المستقيم EF وكانت النقطة K نقطة تقاطع قطريه (الشكل ٦٥٩) .

٣٦٥ - ارسم متوازي أضلاع ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF ، إذا كان ضلعه AB أكبر

من ارتفاع AK بمقدار 5 mm وضلعه BC يساوي AK 1,5 (الشكل ٦٥٩).

٣٦٦ - ارسم معيّن $ABCD$ قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF . إذا كانت النقطة K نقطة تقاطع قطره وكانت النسبة بين قطريه تساوي 2 (الشكل ٦٥٩) .

٣٦٧ - ارسم شبه منحرف قائم $ABCD$ قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM إذا كان رأسه A واقعاً على المستقيم EF وكان $AB=AD$ ، $B = 90^\circ$ ، $C = 90^\circ$ (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٨ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦١) .

٣٦٩ - ارسم مستطيلاً $ABCD$ رأسه A واقع على المستقيم EF واحسب مساحته (الشكل ٦٦١) .

٣٧٠ - ارسم معيّن $ABCD$ رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٢) .

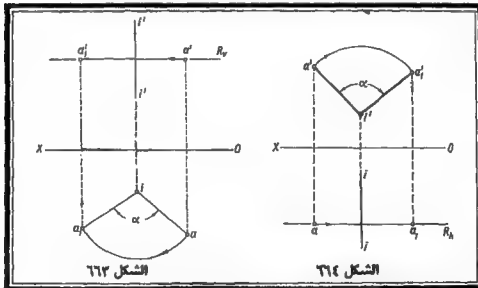
الفصل الثالث

البحث السابع عشر

الدوران . الانتقال الموازي لمستويات الإسقاط

● المثال ١٨٦ : دَوِّر النقطة A حول المحور الشاقولي I بزاوية 120° وفق إتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٣) .

الحل : نرسم النقطة (a, a') عند دورانها حول المحور (i, i') في المستوي R العمودي على محور الدوران أي في المستوي الموازي للمستوي H دائرة نصف قطرها a_i .



المسقط الأفقي (a) للنقطة يرسم قوساً a_1 من دائرة نصف قطرها az زاوية المركزية $\alpha = 120^\circ$. يتحرك المسقط الشاقولي (a') للنقطة وفق مستقيم يوازي خط الأرض ($z = \text{const}$). بمعرفة الوضعية الجديدة للمسقط الأفقي (a_1) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (a'_1).

● المثال ١٨٧: دور النقطة A حول المحور الأمامي I بزاوية 120° وفق اتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٤).

الحل: ترسم النقطة (a, a') عند دورانها حول المحور (i, i') في المستوي R العمودي على محور الدوران أي في المستوي الموازي للمستوي V دائرة نصف قطرها $a'i'$. المسقط الشاقولي (a') للنقطة يرسم قوساً a'_1 من دائرة نصف قطرها $a'i'$ زاوية المركزية $\alpha = 120^\circ$. يتحرك المسقط الأفقي (a) للنقطة وفق مستقيم يوازي خط الأرض ($y = \text{const}$). بمعرفة الوضعية الجديدة للمسقط الشاقولي (a'_1) للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (a_1).

● المثال ١٨٨: دور القطعة AB حول المحور الشاقولي I بزاوية 120° وفق اتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٥).

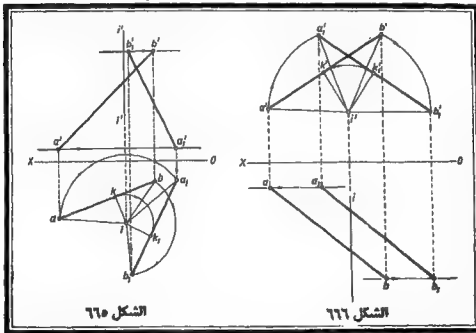
الحل: لكي ندور القطعة بالزاوية المفروضة يكفي أن ندور بهذه الزاوية وباتجاه واحد كلا من النقطتين A و B من القطعة وفق الخطوات التي سبق أن اتبعت.

يتضح من الإنشاء أن طول المسقط الأفقي ($a_1 b_1$) للقطعة لا يتغير، إنما تتغير وضعتها بالنسبة لخط الأرض. يمكننا هذه الخاصية بالاستفادة بتدوير بالزاوية المفروضة نقطة واحدة فقط (k, k') من القطعة الأقرب ما يمكن من المحور

(i, i') . وبعد تدوير النقطة k بزاوية 120° إلى الوضعية k_1 نرسم منها مستقيماً عمودياً على نصف القطر ik_1 ثم نأخذ عليه القطعتين $ak_1 = ak$ و $b_1k_1 = bk$. وبمسطرة المسقط الأفقي (a_1b_1) للقطعة نوجد مسقطها الشاقولي ($a'_1b'_1$) .
(الانشاء مبين على الشكل) .

● المثال ١٨٩ : دور القطعة AB حول المحور الأمامي I بزاوية 60° وفق إتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٦) .

الحل : لكي ندور القطعة بالزاوية المفروضة يكفي أن ندور بهذه الزاوية وباتجاه واحد كلا من النقطتين A و B من القطعة . ولهذا نقوم بالخطوات المذكورة سابقاً .



يتضح من الإنشاء ان طول المسقط الشاقولي (a_1, b_1) للقطعة لا يتغير بتغير فقط وضعيتها بالنسبة لخط الأرض . يمكننا هذه الخاصة بالاستغناء بتدوير بالزاوية المفروضة نقطة واحدة فقط (k, k') من القطعة الأقرب ما يمكن من المحور (i, i') . بعد تدوير النقطة k' بزاوية 60° إلى الوضعية k'_1 نرمس منها مستقيماً عمودياً على نصف القطر $i'k'_1$ ثم نأخذ على القطعتين $a'k' = a'_1k'_1$ و $b'k' = b'_1k'_1$ بمعرفة المسقط الشاقولي (a'_1, b'_1) للقطعة نوجد المسقط الأفقي (a_1, b_1) .
(الإنشاء مبين على الشكل) .

● المثال ١٩ : دور المثلث ABC حول المحور الشاقولي I بزاوية 120° باتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٧) .

الحل : ندور رؤوس المثلث A·B·C بزاوية 120° . بمعرفة الماقل الأفقية (c_1) ، (b_1) ، (a_1) للنقاط نوجد ماقطها الشاقولية (a'_1) ، (b'_1) ، (c'_1) ويوصل ماقط الرؤوس المتألفة نحصل على ماقط المثلث : الأفقي $(a_1b_1c_1)$ والشاقولي $(a'_1b'_1c'_1)$. علينا أن ننتبه إلى أن المثلثين abc و $a_1b_1c_1$ متساويان فيما بينها .

ملاحظة : عند دوران المثلث حول المحور الأمامي I المثلثان $a'b'c'$ و $a'_1b'_1c'_1$ كذلك متساويان فيما بينها .

نتائج : ١ - عند دوران نقطة حول محور شاقولي I سيتحرك مسقطها الشاقولي وفق مستقيم يوازي خط الأرض .

٢ - عند دوران نقطة حول محور أمامي I سيتحرك مسقطها الأفقي وفق مستقيم يوازي خط الأرض .

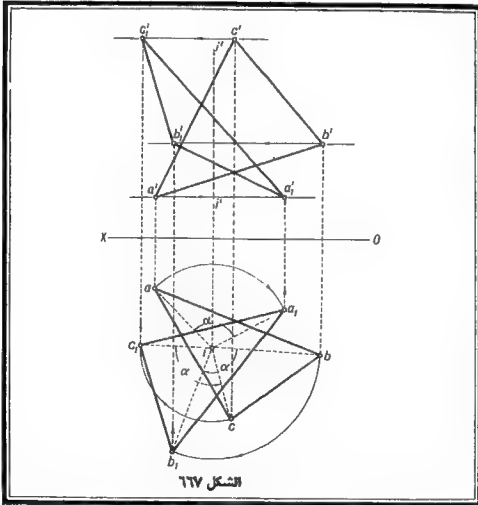
٣ - عند دوران قطعة حول محور شاقولي I فطول المسقط الأفقي للقطعة لا يتغير .

وبناء عليه لا تتغير زاوية ميل القطعة بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي .

٤ - عند دوران قطعة حول محور أمامي I فطول المسقط الشاقولي للقطعة لا يتغير .

وبناء عليه لا تتغير زاوية ميل القطعة بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي .

٥ - عند دوران شكل مستوي (مثلاً مثلث) حول محور شاقولي I فالمسقط الأفقي للشكل لا يتغير ، وبناء عليه لا تتغير زاوية ميل الشكل بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي .



٦- عند دوران شكل مستوي حول محور امامي I فإن المسقط الشاقولي للشكل لا يتغير وبالتالي لا تتغير زاوية ميل الشكل بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي .

٧- عند دوران مجموعة عناصر هندسية (نقاط ، مستقيمت أو نقاط ومستقيمت) حول محور عمودي على H (أو V) فالوضعية النسبية للمسقاط الأفقية (الشاقولية) للعناصر المفروضة لا تتغير ، إنما يتغير وضعها فقط بالنسبة لخط الأرض .

في بعض الحالات عند دوران مجموعة عناصر هندسية حول محور عمودي على مستوي الإسقاط يحدث تطابق المسقط الحاصل مع المسقط الأسامي وللتخلص من ذلك يجيز نقل المجموعة بصورة موازية لمستوي الإسقاط .

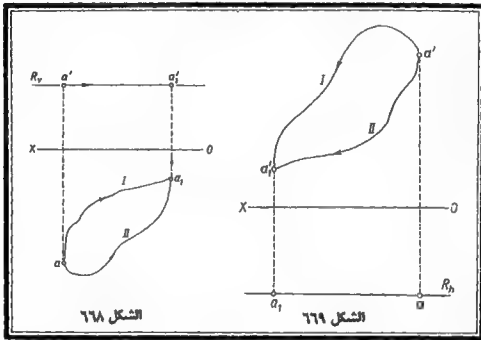
● المثال ١٩١ : لدينا نقطة A ومستوي أفقي R مار من النقطة . تتبع حركة النقطة في المستوي . (الشكل ٦٦٨) .

الحل : إن أي خط (مسار) ترسمه النقطة (a, a') في المستوي R سيكون مسقطه الشاقولي بشكل مستقيم منطبق على أثر المستوي R_1 . المسقط الشاقولي (a') للنقطة يتحرك وفق مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الأفقي (a) فيتحرك وفق خط ممائل لحرك النقطة A في المستوي R (لماذا ؟) .

نفرض أن النقطة (a) تحركت وفق الخط I إلى الوضعية a_1 ، بمعرفة ذلك من السهل أن نعين وضعية المسقط الشاقولي (a_1') للنقطة .

إذا انتقلت النقطة a إلى نفس الوضعية a_1 وفق الخط II فهذا لا ينكس أبداً على وضعية المسقط (a_1') . ومنه نرى أنه يكفي أن نعين الوضعية الجديدة للمسقط الأفقي (a_1) للنقطة كي نعين تماماً وضعية مسقطها الشاقولي (a_1') . في حالتنا هذه لا تتحرك النقطة حول محور إنما تنتقل وفق المستوي الأفقي .

فبا يلي سندعو هذا الانتقال « بالانتقال الموازي للمستوي H أو الانتقال الأفقي » . من الشكل نرى أن بعد المسقط الشاقولي (a') (النقطة عن خط الأرض لا يتغير كما في الدوران حول محور شاقولي I .



● المثال ١٩٢ : لدينا نقطة A ومستوي جبهتي R مار من هذه النقطة .
تتبع حركة النقطة في المستوي (الشكل ٦٦٩) .

الحل : إن أي خط (مار) ترسمه النقطة (a, a') في المستوي R سيكون مسقط الأفقي بشكل خط مستقيم منطبق على أثر المستوي R_x . المسقط الأفقي (a) للنقطة يتحرك وفق مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الشاقولي (a') فيتحرك وفق خط ممائل لحرك النقطة A في المستوي R (لذا ؟) .

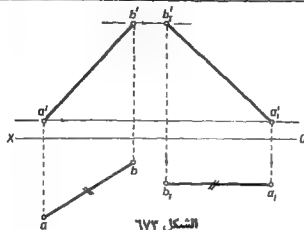
لتفرض أن النقطة a' تحركت وفق الخط II إلى الوضعية a_1' . فبمعرفته ذلك من السهل أن نعين وضعية المسقط الأفقي (a_1) للنقطة . إذا انتقلت النقطة a' إلى نفس الوضعية a_1' وفق الخط II فهذا لا ينعكس بتاتاً على وضعية المسقط الأفقي (a_1) للنقطة . ومنه نرى أنه يكفي أن نبين الوضعية الجديدة للمسقط الشاقولي (a_1') للنقطة كي نعين تماماً وضعية مسقطها الأفقي (a_1) .

في هذه الحالة لا تتحرك النقطة حول المحور وإنما تنتقل في المستوي الموازي للمستوي V . فبما بعد سندعو هذا الانتقال « بالانتقال الموازي للمستوي V أو بالانتقال الجبهي » . من المخطط نرى أن بعد المسقط الأفقي (a_1) للنقطة عن خط الأرض لا يتغير كما في أنشوران حول محور أمامي .

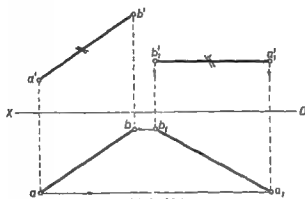
● المثال ١٩٢ : لدينا نقطة A في الربع الثالث ، انقلها إلى الربع الأول (الشكل ٦٧٠) .

الحل : كي نقل النقطة (a, a') إلى الربع الأول يجب أن ننجز على التوالي حركتي انتقال : الأولى جبهة لنقل النقطة (a, a') إلى الربع الثاني ، والثانية أفقية لنقل النقطة (a_1, a_1') إلى الربع الأول (يمكن أن نعكس التتابع : أولاً بصورة موازية للمستوي H بعد ذلك بصورة موازية للمستوي V) . بعد الانتقال الأول (عند انتقال النقطة إلى الربع الثاني) يجب أن يتوضع مسقط النقطة فوق خط الأرض . المسقط الأفقي للنقطة يتحرك وفق مستقيم مواز لخط الأرض . بأخذ نقطة ما كمسقط شاقولي (a_1')

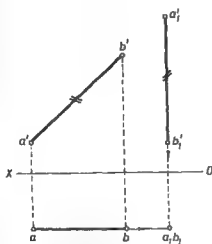




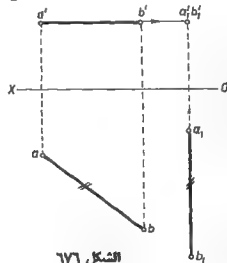
الشكل ٦٧٢



الشكل ٦٧٤



الشكل ٦٧٥



الشكل ٦٧٦

للتقطعة توجد مسقطها الأفقي (a_1) . في الانتقال الثاني المسقط الشاقولي (a'_1) يتحرك وفق مستقيم يوازي خط الأرض . وبأخذ نقطة ما (a_2) تحت خط الأرض (لماذا ؟) كمسقط أفقي للتقطعة توجد مسقطها الشاقولي (a'_2) . النقطة (a_2, a'_2) هي النقطة المطلوبة.

● المثال ١٩٤ : انقل القطعة AB بصورة أفقية إلى وضعية ما (الشكل ٦٧١) .

الحل : عند انتقال القطعة بصورة أفقية طول مسقطها الأفقي كما في دوران القطعة حول محور شاقولي لا يتغير . لناخذ تحت خط الأرض وبوضعية اختيارية (لكي نبقى للقطعة في الربع الأول) قطعة a_1b_1 تساوي للقطعة ab ، ثم توجد مسقطها الشاقولي $(a'_1b'_1)$ بمساعدة مسقطها (a_1b_1) .

ملاحظة : عند حل مثل هذه المسائل نسعى إلى إبقاء العناصر المعطاة في الربع الأول ، وننتقل إلى الربع الأول إذا أعطيت في الأرباع الأخرى .

● المثال ١٩٥ : انقل القطعة AB بصورة جيبية إلى وضعية ما (الشكل ٦٧٢) .

الحل : عند نقل قطعة بصورة جيبية طول مسقطها الشاقولي كما في دورات القطعة حول محور أمامي لا يتغير . لناخذ كيفاً قطعة $a'_1b'_1$ مساوية للقطعة $a'b'$ ثم توجد مسقطها الأفقي (a_1b_1) بمساعدة مسقطها الشاقولي $(a'_1b'_1)$.

● المثال ١٩٦ : انقل القطعة AB إلى وضعية جيبية (الشكل ٦٧٣) .

الحل : ننقل القطعة بصورة أفقية . بما أنها يجب أن تصبح في وضعية جيبية لذلك فمسقطها الأفقي يجب أن يوازي خط الأرض .

لناخذ تحت خط الأرض وبوضعية موازية له قطعة a_1b_1 مساوية للقطعة ab بعد ذلك توجد مسقطها الشاقولي $(a'_1b'_1)$ بمساعدة المسقط الأفقي (a_1b_1) .

● المثال ١٩٧ : انقل القطعة AB إلى وضعية أفقية (الشكل ٦٧٤) .

الحل : ننقل القطعة بصورة جبية . بما أن القطعة يجب أن تتوضع في وضعية أفقية فسطحها الشاقولي يجب أن يكون موازياً لخط الأرض .

لنأخذ فوق خط الأرض وبصورة موازية له قطعة $a_1'b_1'$ مساوية للقطعة $a'b'$.
ثم نوجد مسطحها الأفقي (a_1b_1) بمساعدة المسقط الشاقولي $(a_1'b_1')$.

● المثال ١٩٨ : انقل القطعة AB إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٧٥) .

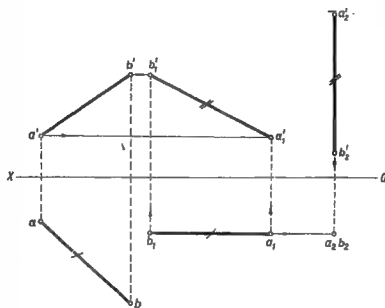
الحل : بما أن القطعة AB ذات وضعية جبية فيكفي انتقال واحد موازي لمستوي الإسقاط الشاقولي . نأخذ قطعة $a_1'b_1'$ في وضعية عمودية على خط الأرض (لماذا ؟) مساوية للقطعة $a'b'$ ، بعد ذلك نوجد مسطحها الأفقي (a_1b_1) بشكل نقطة وذلك بمساعدة المسقط الشاقولي $(a_1'b_1')$.

● المثال ١٩٩ : انقل القطعة AB إلى وضعية أمامية (الشكل ٦٧٦) .

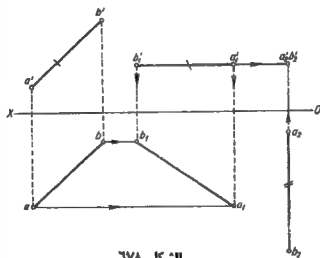
الحل : بما أن القطعة AB ذات وضعية أفقية فيكفي انتقال واحد موازي لمستوي الإسقاط الأفقي . نأخذ قطعة a_1b_1 بوضعية عمودية على خط الأرض (لماذا ؟) مساوية للقطعة ab . بعد ذلك نوجد المسقط الشاقولي $(a_1'b_1')$ للقطعة بشكل نقطة بمساعدة المسقط الأفقي (a_1b_1) .

● المثال ٢٠٠ : انقل القطعة AB إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٧٧) .

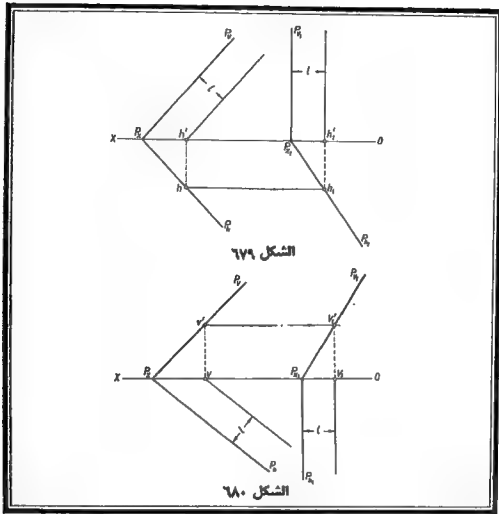
الحل : بما أن القطعة المفروضة $(ab, a'b')$ ذات وضعية كيفية فلكي



الشكل ٦٧٧



الشكل ٦٧٨



ننقلها إلى وضعية شاقولية يجب أن نتجز انتقالين متتاليين : الأول - أعطي كي
ننقل القطعة ($ab, a'b'$) إلى وضعية جبية ، الثاني - جيب كي ننقل القطعة ($a_1b_1, a'_1b'_1$)
إلى وضعية شاقولية . لهذا نأخذ في مكان ما وبوضعية موازية لحط الأرض قطعة

a_1b_1 مساوية للقطعة ab ثم نعين المسقط الشاقولي $(a'_1b'_1)$ للقطعة ، بعد ذلك نأخذ في وضعية عمودية على خط الأرض قطعة $a'_2b'_2$ مساوية للقطعة $a'_1b'_1$ ، ثم نوجد المسقط الأفقي (a_2b_2) للقطعة بشكل نقطة . القطعة $(a_2b_2 , a'_2b'_2)$ هي القطعة المطلوبة .

● المثال ٢٠١ : انقل القطعة AB إلى وضعية أمامية (الشكل ٦٧٨) .

الحل : بما أن القطعة المفروضة $(ab, a'b')$ ذات وضعية كيفية فلكي ننقلها إلى وضعية أمامية يجب أن ننجز انتقالين متتالين : الأول - موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي لكي نحول القطعة $(ab , a'b')$ إلى وضعية أفقية . الثاني - موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي لكي نحول القطعة $(a_1b_1 , a'_1b'_1)$ إلى وضعية أمامية . لهذا نأخذ في مكان ما وبوضعية موازية لخط الأرض قطعة $a'_1b'_1$ مساوية للقطعة $a'b'$ ثم نعين المسقط الأفقي (a_1b_1) للقطعة . بعد ذلك نأخذ في وضعية عمودية على خط الأرض قطعة a_2b_2 مساوية للقطعة a_1b_1 ، ونعين المسقط الشاقولي $(a'_2b'_2)$ للقطعة بشكل نقطة . القطعة $(a_2b_2 , a'_2b'_2)$ هي القطعة المطلوبة .

● المثال ٢٠٢ : انقل المستوي P إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٧٩) .

الحل : لكي ننقل المستوي المفروض إلى وضعية شاقولية نرسم في المستوي مستقيماً جيبياً وننقله إلى وضعية شاقولية ، عندها سيأخذ المستوي المفروض وضعية شاقولية . نرمز في المستوي P مستقيماً جيبياً وننقله بصورة موازية للمستوي V حتى يصبح المستقيم الجببي في وضعية شاقولية . المسقط الشاقولي للمستقيم الجببي ومن ثم الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي عموديات على خط الأرض . أما المسقط الأفقي للمستقيم الجببي فيتحول إلى نقطة . ولما كانت انتقال المستوي بشكل موازي لمستوي الإسقاط الشاقولي فزاوية ميله على مستوي الإسقاط هذا كما في دوران المستوي حول محور أمامي لا تتغير . كما لا يتغير في أي وضعية

المستوي البعد بين الأثر الشاقولي للمستوي والمقط الشاقولي للمستقيم الجبهي .
 نأخذ على خط الأرض نقطة لالتقاء ما P_{21} ونرسم منها بصورة عمودية على خط الأرض
 الأثر الشاقولي (P_{11}) للمستوي ، وبشكل يوازيه وعلى بعد l نرسم المسقط
 الشاقولي للمستقيم الجبهي . بإيجاد الأثر الأفقي للمستقيم الجبهي أي النقطة h_1 نرسم
 الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي من النقطتين P_{21} و h_1 .

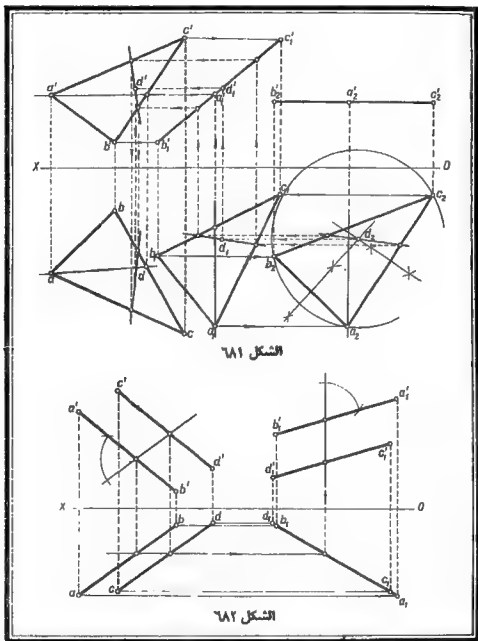
● المثال ٢٠٣ : انقل المستوي P إلى وضعية أمامية (الشكل ٦٨٠) .

الحل : لنقل المستوي المفروض إلى وضعية أمامية نرسم في المستوي
 مستقيماً أفقياً ثم ننقله إلى وضعية أمامية ، عندها المستوي المفروض سيأخذ وضعية
 أمامية أيضاً . لنعلم في المستوي P مستقيماً أفقياً ما وننقله بصورة موازية للمستوي
 H بحيث يصبح في وضعية أمامية . المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي وبالتالي الأثر
 الأفقي (P_{h1}) للمستوي عموديان على خط الأرض . المسقط الشاقولي للمستقيم
 الأفقي يتحول إلى نقطة . عند انتقال المستوي بصورة موازية لمستوي الإسقاط
 الأفقي فزاوية ميله على مستوي الإسقاط هذا لا تتغير . كما لا يتغير البعد بين الأثر الأفقي
 للمستوي والمسقط الأفقي للمستقيم الأفقي مهما كانت وضعية المستوي .

ومنه : نأخذ على خط الأرض نقطة اللقاء ما P_{21} ونرسم منها بصورة عمودية
 على خط الأرض الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ، وبصورة موازية له وعلى بعد
 l المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي . بإيجاد الأثر الشاقولي للمستقيم الأفقي أي
 النقطة v'_1 نرسم الأثر الشاقولي (P_{11}) للمستوي من النقطتين v'_1 و P_{21} .

● المثال ٢٠٤ : أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل

(٦٨١) .

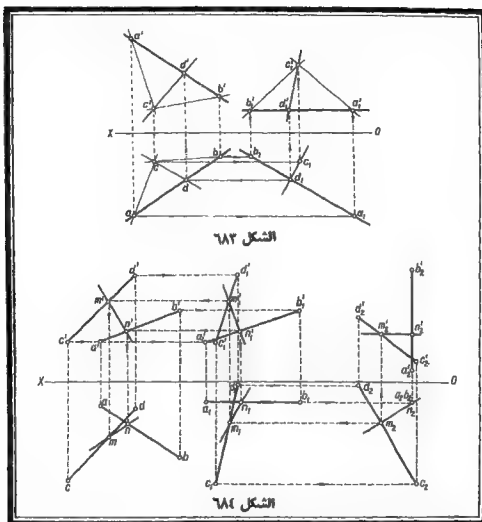


الحل يقع مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث في نقطة تقاطع محاوره
 فلكي نرمس هذه المحاور نلزمنا الأبعاد الحقيقية للمثلث . لهذا يجب أن ننقل مستوي
 المثلث الى وضعية موازية لأحد مستويات الإسقاط مثلاً H . نتوصل إلى هذه
 الوضعية بانتقالين : الأول أفقي والثاني جيهي .

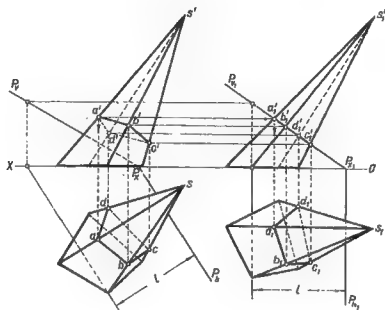
لهذا نرمس مستقيماً أفقياً في مستوي المثلث من النقطة (a, a') وننقله بصورة
 أفقية حتى يتعامد مع المستوي V . عند نقل المثلث بصورة أفقية فقطه الأفقي كما
 هو معروف يجب أن لا يتغير ، لذلك نرمس المسقط الأفقي للمثلث في وضعية
 $a_1 b_1 c_1$ يكون فيها المسقط الأفقي للمستقيم العمودياً على خط الأرض.
 بمساعدة المسقط $a_1 b_1 c_1$ نعين المسقط الشاقولي $(a'_1 b'_1 c'_1)$ للمثلث الذي يأخذ
 شكل خط مستقيم (لماذا ؟) . بعد ذلك ننقل المثلث $(a_1 b_1 c_1, a'_1 b'_1 c'_1)$
 بصورة جبهة بحيث يشغل المسقط الشاقولي $(a'_2 b'_2 c'_2)$ للمثلث وضعية موازية لخط
 الأرض ، ثم من $a'_2 b'_2 c'_2$ نوجد $a_2 b_2 c_2$ - الشكل الحقيقي للمثلث . برسم
 محوري الضلعين $a_2 b_2$ و $a_2 c_2$ للمثلث نوجد نقطة تقاطعها (d_2, d'_2) - مركز
 الدائرة ، ثم نعود بها إلى الوضعية الأولى .
 (الانشاء مبين على الشكل) .

● **المثال ٢٠٥** : انقل المستقيمين المتوازيين AB و CD إلى وضعية يكون فيها
 مسطاهما الأفقيان منطبقين (الشكل ٦٨٢) .

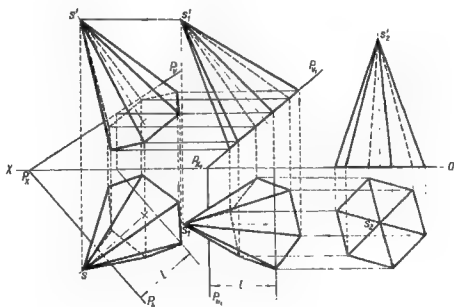
الحل : يعين المستقيمان AB و CD متوالياً مسطاهما الأفقيان ينطبقان عندما
 يأخذ هذا المستوي وضعية شاقولية ومنه : نرمس مستقيماً جيباً في هذا المستوي وننقل



المجموعة بأكملها بصورة موازية للمستوي V بحيث يأخذ المستقيم الجهبي وضعية شاقولية . الوضعية النسبية المساقط الشاقولية سوف لا تتغير . بمعرفة المسقطين الشاقولين (a_1b_1) و (c_1d_1) للمستقيمين نوجد مسقطيها الأفقيين (a_2b_2) و (c_2d_2) المنطبقين على بعضها .



الشكل ٣٨٥



الشكل ٣٨٦

● المثال ٢٠٦ : أسقط عموداً من النقطة C على المستقيم AB (الشكل ٦٨٣) .

الحل : ان عملية إسقاط عمود من نقطة على مستقيم بصورة مباشرة على المخطط ممكنة فقط في تلك الحالة عندما يكون المستقيم المقروص موازياً لأحد مستويات الإسقاط (وفق أي نظرية ٢) . لهذا ننقل المجموعة المقروصة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي حتى يصبح المستقيم $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ أفقياً .

بمعرفة مساقط النقطة C_1 والمستقيم A_1B_1 نرمم من النقطة c_1 عموداً على المستقيم a_1b_1 وعند تقاطعها نحصل على المسقط الأفقي (d_1) — أساس العمود . وبايجاد مسقطي أساس العمود (d, d') في الوضعية الأولى نرمم مسقطي العمود المنشود : الأفقي — من النقطتين d و c والشاقولي — من النقطتين c' و d' .

● المثال ٢٠٧ : اقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم MN عمودي عليها (الشكل ٦٨٤) .

الحل : نقل المستقيمين $(ab, a'b')$ ، $(cd, c'd')$ بحيث يشغل أحد المستقيمين مثلاً $(ab, a'b')$ وضعية شاقولية . بما أن المستقيم $(ab, a'b')$ كيفي لذا يجب كما هو معروف أن نقوم بعملية نقل متاليتين للمجموعة المقروصة : الأولى — موازية للمستوي H يصبح فيها المستقيم $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ جيباً . والثانية — موازية للمستوي V يصبح فيها المستقيم $(a_2b_2, a'_2b'_2)$ شاقولياً . لقطع المستقيمين $(a_2b_2, a'_2b'_2)$ و $(c_2d_2, c'_2d'_2)$ بمستقيم عمودي عليهما $(m_2n_2, m'_2n'_2)$ ، بعد ذلك نوجد المستقيم $(mn, m'n')$ في وضعيته الأصلية الأولى . (الإنشاءيين على الشكل) .

● المثال ٢٠٨ : ارسم خط تقاطع المستوي P مع الهرم (الشكل ٦٨٥).

الحل : لإيجاد خط التقاطع يجب أن نوجد نقاط تقاطع أضلاع الهرم مع المستوي . بما أن أضلاع الهرم والمستوي P كيفية لذلك بفضل تغيير وضعية المجموعة بشكل يصبح فيه المستوي P_1 أمامياً . نرسم مستقيماً أفقياً في المستوي P وننقل المجموعة بصورة أفقية بحيث يشغل المستقيم الأفقي وضعية أمامية . وكذلك المستوي P_1 . يرسم عناصر المجموعة المذكورة نوجد وفق قاعدة الإسقاط المعروفة ، خط التقاطع $(a_1b_1c_1d_1, a'_1b'_1c'_1d'_1)$ للمستوي P مع الهرم . بعد ذلك نعين خط التقاطع في الوضع الأصلي الأول . (الإنشاء مبين على الشكل) .

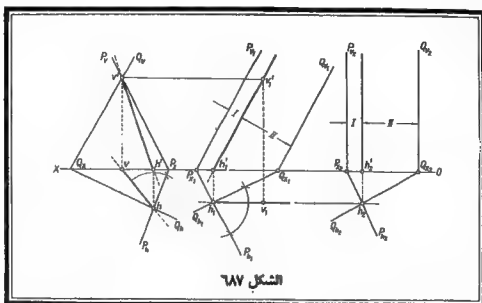
● المثال ٢٠٩ : أنشئ مساقط هرم سداسي منتظم ، تقع قاعدته في المستوي P إذا علمت أن طول ضلع قاعدته يساوي 10 mm ، وارتفاعه يساوي $h = 90 \text{ mm}$ (الشكل ٦٨٦) .

الحل : نرسم بصورة مبدئية مسطحي الهرم بشكل تقع فيه قاعدته في مستوي الإسقاط الأفقي . بنقل المستوي P إلى وضعية أمامية P_1 ، نرسم الهرم السابق بشكل تقع قاعدته في المستوي الأمامي P_1 . يبقى علينا أن ننقل المجموعة بحيث يشغل المستوي P_1 الوضعية الأصلية . (الإنشاء مبين على الشكل) .

● المثال ٢١٠ : انقل المستويين P و Q إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٨٧) .

الحل : لكي يكون المستويان المفروضان P و Q عموديين على مستوي الإسقاط الأفقي يجب أن يكون فصلهما المشترك عمودياً على هذا المستوي . لهذا ، نوجد الفصل المشترك للمستويين وكإيتنا (انظر المثال ٢٠٠) وباستعمال انتقالين نحوله مع المجموعة كلها إلى وضعية شاقولية . في هذه الوضعية للفصل المشترك

المستويان Q_1P_1 و Q_2P_2 عموديان كذلك على المستوي H . (الإنشاء مبن على الشكل) .



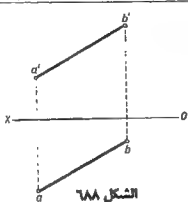
ملاحظة : إذا كان الفصل المشترك للمستويين مستقيماً أفقياً أو جيبياً فالمسألة تحل بانتقال واحد .

نتيجة : من تحليل المسائل المحولة بطريقة الانتقال يبدو جلياً أن المهم في الموضوع إيجاد وضعية ملائمة للعناصر المفروضة بحيث يسهل حل المسألة . سندعو فيما بعد وضعية العناصر الهندسية بالنسبة لمستويات الاسقاط المفروضة والتي لاتتطلب أي إنشاءات إضافية بالوضعيات « الفضلى » للعناصر المفروضة ؟

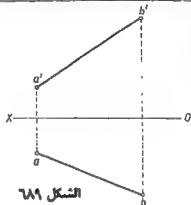
مسائل

ملاحظة : حل المسائل التالية بطريقة الدوران والانتقال .

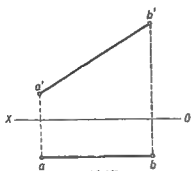
- ٣٧١ - ضع المستقيم AB في وضعية أفقية . (الشكل ٦٨٨ ، ٦٨٩) .
- ٣٧٢ - ضع المستقيم AB في وضعية جبية (الشكل ٦٨٨ ، ٦٨٩) .
- ٣٧٣ - ضع المستقيم AB في وضعية شاقولية (الشكل ٦٩٠ ، ٦٩١) .
- ٣٧٤ - ضع المستقيم AB في وضعية أمامية (الشكل ٦٩١ ، ٦٩٢) .
- ٣٧٥ - ضع المستوي P في وضعية شاقولية (الشكل ٦٩٣ ، ٦٩٤) .
- ٣٧٦ - ضع المستوي P في وضعية أمامية (الشكل ٦٩٣ ، ٦٩٤) .
- ٣٧٧ - ضع المثلث ABC في وضعية يكون فيها المسقط الأفقي (الشاقولي) للمثلث بشكل خط مستقيم (الشكل ٦٠٠) .
- ٣٧٨ - ضع المستقيمين المتوازيين AB و CD في وضعية بحيث ينطبق مسقطاهما الشاقوليان (الأفقيان) (الشكل ٦٣٩) .
- ٣٧٩ - ضع المستقيمين AB و CD في وضعية بحيث يتوازي مسقطاهما الأفقيان (الشاقوليان) (الشكل ٥٧٨) .
- ٣٨٠ - ضع المستقيمين AB و CD في وضعية يصعب فيها المستقيم AB شاقولياً



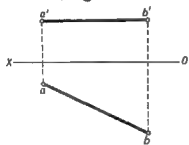
الشكل ٦٨٨



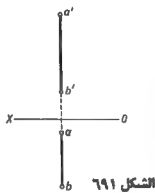
الشكل ٦٨٩



الشكل ٦٩٠



الشكل ٦٩٢



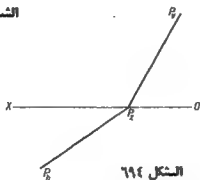
الشكل ٦٩١

P_2

X ————— O

P_2

الشكل ٦٩٣



الشكل ٦٩٤

(الشكل ٥٧٨) أو أمامياً (الشكل ١٤٤) .

٣٨١ - ضع المستويين Q و P في وضعية شاقولية (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤) أو أمامية (الشكل ٤٠٠ ، ٤٠٨) .

٣٨٢ - اقطع المستقيمين AB و CD بنالت MN عمودي على المستقيم AB بحيث يكون طول قطعة المستقيم MN الواقعة بين المستقيمين المفروضين مساوياً 20 mm (الشكل ٥٧٨) .

٣٨٣ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٦٦ ، ٤٦٧) .

• • •

البحث الثامن عشر

الإنطباق . الدوران حول مستقيم أفقي وجبهي

أهثلة

● المثال ٢١١ : لدينا الأثر الأفقي (P_2) للمستوي P والنقطة A من هذا المستوي .
أوجد مطبق النقطة A على مستوي الإسقاط الأفقي . لا تستعمل الأثر الشاقولي
للمستوي (الشكل ٦٩٥) .

الحل : نمر من النقطة (a, a') مستويًا R عمودياً على محور الدوران P_2 ونوجد
مركز الدوران (α, α') أي نقطة تقاطع المستوي R مع الأثر P_2 . نعين الطول
الحقيقي لنصف قطر الدوران $(a\alpha, a'\alpha')$ ثم نرسم من النقطة α قوساً نصف قطره $r =$
نقطع الأثر R_2 في النقطة المطلوبة A_2 . معطى حل واحد .
نتائج : عند تطبيق مستوي على مستوي الإسقاط الأفقي نلاحظ أن :

- ١ - نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم ، أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط
الأفقي للنقطة عن الأثر الأفقي للمستوي ، أما الضلع القائم الآخر فيساوي z النقطة .
- ٢ - يقع مطبق أي نقطة من المستوي P على الأثر الأفقي (R_2) لمستوي الدوران
وعلى بعد يساوي نصف قطر الدوران .
- ٣ - في الحالة الخاصة عندما يكون المستوي - شاقولياً $r = z$ و $a\alpha = 0$.

● المثال ٢١٢ : لدينا مستوي أمامي P ونقطة A منه . أوجد مطبق النقطة A على المستوي

نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران $(a\beta + a'\beta')$ ثم نرسم من النقطة β' قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R في النقطة المطلوبة A_0 .
معطى حل واحد .

نتائج : عند تطبيق مستوي على مستوي الإسقاط الشاقولي نلاحظ أن :

١ - نصف قطر الدوران هو وتر مثل قائم أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن الأثر الشاقولي للمستوي . أما الضلع القائم الآخر فيساوي y النقطة .

٢ - يقع مطبق أي نقطة من المستوي P على الأثر الشاقولي (R_v) لمستوي الدوران وعلى بعد يساوي نصف قطر الدوران .

٣ - في الحالة الخاصة عندما يكون المستوي أمامياً $a'\beta' = 0$ و $r = y$.

● **المثال ٢١٤ :** لدينا مستوي شاقولي P ونقطة A منه . أوجد مطبق النقطة A على المستوي V (الشكل ٦٩٨) .

الحل : بما أن $a'\beta' = P_v a$ فنصف قطر دوران النقطة (a, a') يساوي $P_v a$. لهذا نقط من المسقط الشاقولي (a') للنقطة عموداً على الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي ونأخذ عليه $P_v a = \beta' A_0$.
معطى حل واحد .

● **المثال ٢١٥ :** لدينا القطعة A والمستقيم MN . طبق النقطة A بدوران حول المستقيم MN على المستوي الأفقي T المار من المستقيم MN (الشكل ٦٩٩) .

الحل : نرمس من النقطة (a, a') مستويًا R عمودياً على محور الدوران $(mn, m'n')$ ، ونوجد مركز الدوران (α, α') أي نقطة تقاطع المستوي R مع المستقيم $(mn, m'n')$. نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران $(a\alpha, a'\alpha')$ ونرمس من النقطة α قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R_2 في النقطة المطلوبة A_2 . (معطى حل واحد) .

نتيجة : إن نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الأفقي للنقطة عن المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي ، أما الضلع القائم الآخر فيساوي بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي .

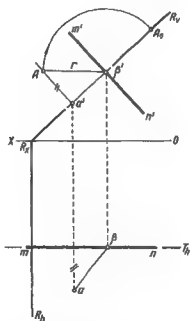
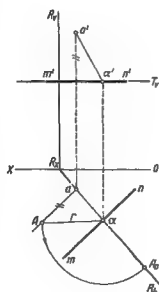
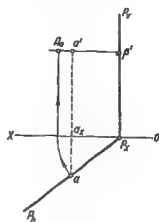
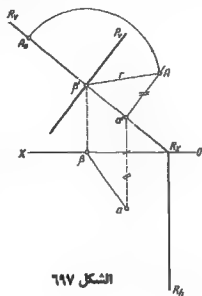
● **المثال ٢١٦ :** لدينا النقطة A والمستقيم MN . طبق النقطة A بدوران حول المستقيم MN على المستوي الجهبي T المار من المستقيم MN (الشكل ٧٠٠) .

الحل : نرمس من النقطة (a, a') مستويًا R عمودياً على محور الدوران $(mn, m'n')$. نوجد مركز الدوران (β, β') أي نقطة تقاطع المستوي R مع المستقيم $(mn, m'n')$. نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران $(a\beta, a'\beta')$ ونرمس من النقطة β قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R_2 في النقطة المطلوبة A_2 .

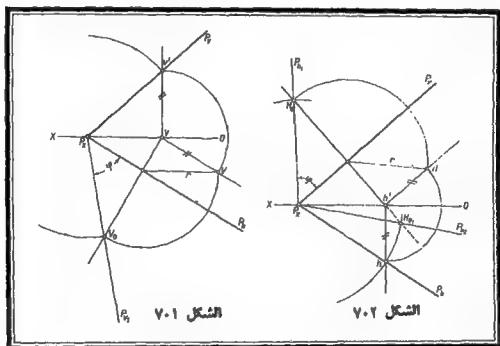
نتيجة : إن نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن المسقط الشاقولي للمستقيم الجهبي ، أما الضلع القائم الآخر فهو بعد المسقط الأفقي للنقطة عن المسقط الأفقي للمستقيم الجهبي .

● **المثال ٢١٧ :** طبق المستوي P على مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٧٠١) .

الحل : ندور المستوي P حول الأثر الأفقي (P_2) للمستوي . لإيجاد الأثر



الشاقولي (P_{v1}) المطبق للمستوي نأخذ على الأثر P_v نقطة ما (v, v') ثم نوجد مطبقها V_0 على المستوي H . نرمز من النقطتين P_v و V_0 مطبق الأثر الشاقولي المطلوب (P_{v1}) للمستوي .
 الزاوية θ هي الزاوية الحقيقية بين أثري المستوي .



من الشكل نرى أن $P_v V_0 = P_v v'$. باستعمال هذه العلاقة يمكن أن نبسط حل المسألة . نسط من النقطة v عموداً على الأثر P_v ثم نرمز من النقطة P_v قوساً من دائرة نصف قطرها $P_v v'$ فيقطع العمود السابق في النقطة V_0 . نرمز الأثر المطبق P_{v1} ماراً من النقطتين P_v و V_0 .

● المثال ٢١٨ : طبق المستوي P على مستوي الإسقاط للشاقولي (الشكل ٧٠٢) .

الحل : ندور المستوى P حول الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي . لإيجاد الأثر الأفقي المطبق (P_{H1}) للمستوي نأخذ على الأثر P_H نقطة h' (h, h') ثم نوجد مطبقها H_2 على المستوى V . نرمم من النقطتين P_v و H_2 الأثر الأفقي المطبق (P_{H1}) للمستوي .

الزاوية θ هي الزاوية الحقيقية بين أثري المستوى .

من الشكل نرى أن $P_v H_2 = P_v h$. باستعمال هذه العلاقة يمكن تسهيل حل المسألة . نسط من النقطة h' عموداً على الأثر P_v ثم نرمم من النقطة P_v قوساً من دائرة نصف قطرها $P_v h$ فيقطع العمود في النقطتين H_2 و H_1 . نرمم الأثر المطبق P_{H1} من النقطتين P_v و H_2 والأثر P_{H2} من النقطتين P_v و H_1 .

● المثال ٢١٩ : لدينا مستوى P ونقطة A منه . أوجد مطبق هذه النقطة على مستوى الإسقاط الأفقي بدون تعيين نصف قطر الدوران (الشكل ٧٠٣ ، ٧٠٤) .

الحل : الطريقة الأولى : باستعمال مستقيم أفقي . نوجد النقطة $V_0 -$ مطبق النقطة (v, v') ونرم منها مطبق المستقيم الأفقي موازياً للأثر الأفقي (P_H) للمستوي . نسط من النقطة a عموداً على الأثر P_H فيقطع مطبق المستقيم الأفقي في النقطة المطلوبة A_0 .

الطريقة الثانية : باستعمال مستقيم جهبي . نوجد مطبق الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي ، نرمم من النقطة h مطبق المستقيم الجهبي موازياً لمطبق الأثر الشاقولي للمستوي . نسط من النقطة a عموداً على الأثر P_H فيقطع مطبق المستقيم الجهبي في النقطة المطلوبة A_0 .

● المثال ٢٢٠ : لدينا مستوي P ونقطة A منه . أوجد مطبق هذه النقطة على مستوي الإسقاط الشاقولي بدون تعيين نصف قطر الدوران (الشكل ٧٠٥ و ٧٠٦).

الحل : الطريقة الأولى : نوجد مطبق الأثر الأفقي (P_h) للمستوي ، ونرسم من النقطة v' مطبق المستقيم الأفقي موازياً للأثر P_h . نقط من النقطة a' عموداً على الأثر P_v فيقطع مطبق المستقيم الأفقي في النقطة المطلوبة A_0 .

الطريقة الثانية : باستعمال مستقيم جهي . نوجد النقطة H_0 مطبق النقطة (h, h') ونرسم منها مطبق المستقيم الجهبي موازياً للأثر الشاقولي (P_v) للمستوي . نقط من النقطة a' عموداً على الأثر P_v فيقطع مطبق المستقيم الجهبي في النقطة المطلوبة A_0 .
نتيجة : عند تطبيق مستوي على المستوي V فطبق أي نقطة من المستوي يتعين بتقاطع مطبق المستقيم الرئيسي المار من النقطة مع العمود النازل من المسقط الشاقولي للنقطة على الأثر الشاقولي للمستوي .

ملاحظة : على ضوء حلول المسائل الأخيرة كما نرى من المخططات إن من الصعب أن نحل المسألة العكسية . أي إذا أعطي مطبق النقطة على المستوي الأفقي (الشاقولي) فيمكن تعيين مسقطي هذه النقطة (انظر الأمثلة التالية) .

● المثال ٢٢١ : لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A_0 على مستوي الإسقاط الأفقي . أوجد مسقطي هذه النقطة (الشكل ٧٠٧) .

الحل : نوجد مطبق الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي ونرسم من النقطة A_0 مطبق مستقيم أفقي موازياً للأثر الأفقي (P_h) للمستوي فيقطع الأثر P_v في النقطة V_0 . بمساعدة النقطة V_0 نجد مسقطها (v, v') ونرسم منها مسقطي المستقيم الأفقي (كيف ؟) . بعد ذلك ننسقط من A_0 عموداً على الأثر P_h فيتقاطعه مع المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي نحصل على

المسقط الأفقي (a) للنقطة . بمعرفة ذلك نوجد المسقط الشاقولي (a') للنقطة .

يمكن حل المسألة بواسطة مستقيم جيبي .

● المثال ٢٢٢ : لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A₀ على المستوي H . أوجد

مسطبي هذه النقطة (الشكل ٧٠٨) .

الحل : النقطة A₀ تقع في الحقل الحلقلي لمستوي الإسقاط الأفقي . نوجد

مطبق الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي ونرسم من النقطة A₀ مطبق مستقيم جيبي موازياً

للأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي فيقطع الأثر P_h في النقطة H₀ . من H₀ نوجد المسقطين (h, h')

ونرسم منها مسطبي المستقيم الجيبي (كيف ؟) . نازل من النقطة A₀ عموداً على

الأثر P_h فيتقاطع مع المسقط الأفقي للمستقيم الجيبي نحصل على المسقط الأفقي (a)

ثم المسقط الشاقولي (a') للنقطة . يمكن حل المسألة كذلك بمساعدة مستقيم أفقي .

● المثال ٢٢٣ : لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A₀ على المستوي V . أوجد

مسطبي هذه النقطة (الشكل ٧٠٩) .

الحل : نوجد مطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ونرسم من النقطة A₀

مطبق مستقيم افقي موازياً لمطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي فيقطع الأثر P_v

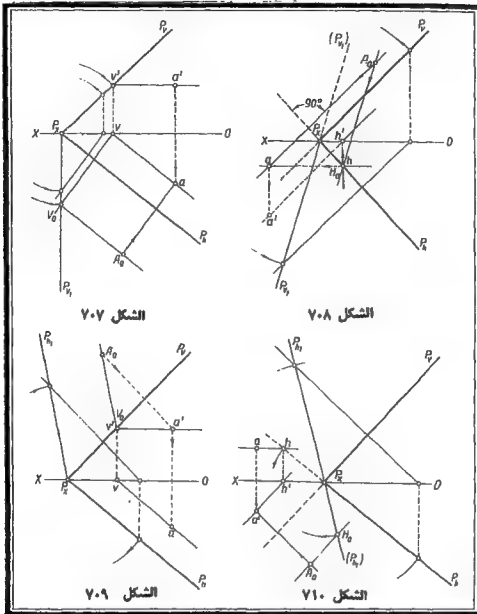
في النقطة V₀ . من النقطة V₀ نوجد مسقطها (v, v') ثم نرسم منها مسطبي المستقيم

الأفقي (كيف ؟) . نقط من النقطة A₀ عموداً على الأثر P_v فيتقاطع مع المسقط

الشاقولي للمستقيم الأفقي فنصل على المسقط الشاقولي (a') للنقطة . بمعرفة ذلك نوجد

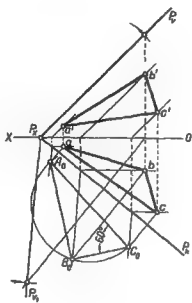
المسقط الأفقي (a) للنقطة .

يمكن حل المسألة بمساعدة مستقيم جيبي .

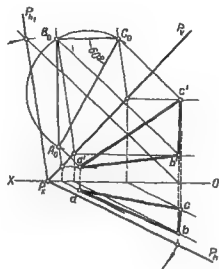


● المثال ٢٢٤ : لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A_0 على المستوي V (الشكل ٧١٠) . أوجد مسطقي النقطة .

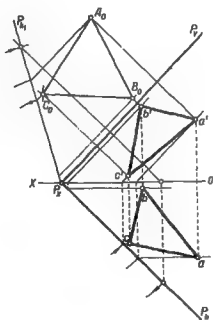
الحل : النقطة A_0 تقع في المحل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي . نوجد



الشكل ٧١١



الشكل ٧١٢



مطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ونرسم من النقطة A_0 مطبق مستقيم جيهي
يرازي الأثر P_v فيقطع الأثر P_{h1} في النقطة H_0 . بمساعدة H_0 نوجد مسقطهـ
(h, h') حيث نرم منها مسطلي المستقيم الجيهي (كيف ؟) .

نقط من النقطة A_0 عموداً على الأثر P_v فيقاطعه مع المسقط الشاقولي للمستقيم
الجيهي نحصل على المسقط الشاقولي (a') للنقطة . بمعرفته نوجد المسقط الأفقي
(a) للنقطة .

يمكن حل المسألة بمساعدة مستقيم أفقي .

● المثال ٢٢٥ : أنشئ مسطلي مثلث قائم ABC واقع في المستوي P إذا
علم المسقط الشاقولي للوتر AC والزاوية $C = 60^\circ$ (الشكل ٧١١) .

الحل : نوجد المطين A_0 و C_0 للنقطتين (a, a') و (c, c') على
المستوي H . نرمم الشكل الحقيقي للمثلث $A_0B_0C_0$ ، بعد ذلك بمعرفة B_0
نوجد مسطليها (b, b') . يوصل النقطة (b, b') بالنقطتين (a, a') و (c, c')
نحصل على مسطلي المثلث المطلوب (abc) و ($a'b'c'$) .

إن هذه المسألة محاولة على الشكل ٧١٢ ، المستوي P مطبق على المستوي V .
الانشاء مين على الشكل .

● المثال ٢٢٦ : ارمم مسطلي مثلث متساوي الأضلاع ABC واقع في المستوي
 P إذا علم المسقط الأفقي للضلع AB (الشكل ٧١٣) .

الحل : نوجد المطبق A_0B_0 لضلع المثلث على المستوي V . نرمم الشكل
الحقيقي للمثلث $A_0B_0C_0$ وبمعرفة C_0 نوجد مسطليها (c, c') . نصل النقطة

(c , c') بطرفي الضلع (a b , a' b') فنحصل على مسطبي المثلث المطلوب
(a b c) و (a' b' c') .

إن هذه المسألة محلولة على الشكل ٧١٤ . المستوي P مطبق على المستوي H.

● المثال ٢٢٧ : أوجد الشكل الحقيقي للمثلث ABC الواقع في المستوي P الموازي لخط الأرض إذا أعطي المسقط الأفقي للمثلث (الشكل ٧١٥) .

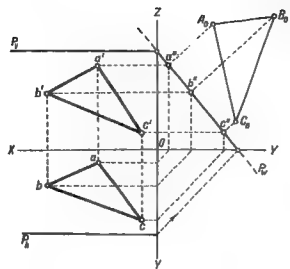
الحل : نوجد مسطبي المثلث (a' b' c') و (a'' b'' c'') . نطبق المستوي P على مستوي الإسقاط الجني . نوجد مطبق النقطة A₀ برفع عمود من المسقط الجني للنقطة على الأثر P₀ وبأخذ قطعة A₀ a'' عليه تساوي x النقطة (a , a') . وبصورة مشابهة نوجد النقطتين B₀ و C₀ وبوصل النقاط الحاصلة نحصل على الشكل الحقيقي للمثلث (a b c , a' b' c') .

يمكن حل المسألة بتطبيق المستوي P على المستوي H (الشكل ٧١٦) أو على المستوي V (الشكل ٧١٧) . الانشاء مبين على الشكل .

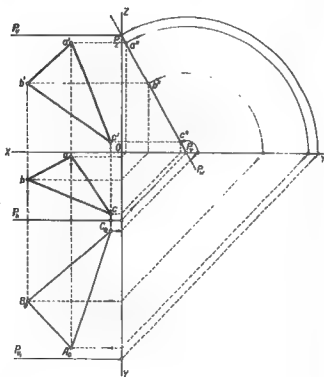
نعين قيم أنصاف أقطار الدوران لرؤوس المثلث بمساعدة مستوي الإسقاط الجني (كيف ؟) .

نتيجة : إن نصف قطر الدوران لأي نقطة في مستوي يوازي خط الأرض عند تطبيقه :

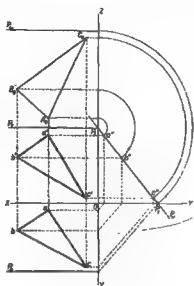
- ١ - على مستوي الإسقاط الجني يساوي الاحداثية x للنقطة .
- ٢ - على مستوي الإسقاط الأفقي يساوي P₀ a' ، P₀ b' ، P₀ c' ، الخ .
- ٣ - على مستوي الإسقاط الشاقولي يساوي P₀ a'' ، P₀ b'' ، P₀ c'' ، الخ .



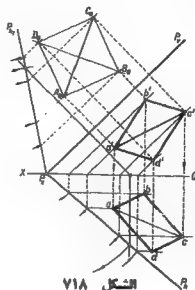
الشكل ٧١٥



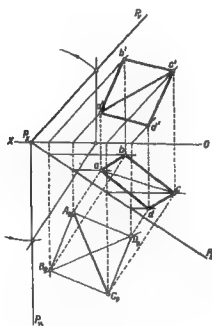
الشكل ٧١٦



الشكل ٧١٧



الشكل ٧١٨



الشكل ٧١٩

● المثال ٢٢٨ : انشئ مستطي مربع ABCD واقع في المستوي P إذا أعطي المسقط الشاقولي لقطره AC (الشكل ٧١٨) .

الحل : نطبق المستوي P على مستوي الإسقاط الشاقولي ونعين مطبق النقطتين A_0 و C_0 . نرمس على القطر A_0C_0 مربعاً $A_0B_0C_0D_0$ وبعد ذلك بخطوات عكسية نعين مسطبي المربع $(abcd)$ و $(a'b'c'd')$.

إن هذه المسألة محلولة على الشكل ٧١٩ حيث طبق المستوي P على H .

● المثال ٢٢٩ : انشئ مسطبي دائرة واقعة في المستوي P إذا علم مركزها C ونصف قطرها 20mm (الشكل ٧٢٠) .

الحل : تسقط الدائرة على مستوي الإسقاط H و V بشكل قطعين ناقصين قطرهما الكبير يساوي دائماً قطر الدائرة . بما أن الدائرة تقع في مستوي كروي لذلك من المستحيل لإيجاد قطر الدائرة الذي يسقط على كلا مستويي الإسقاط بقيته الحقيقية . لهذا نعين على حدة قطري كل من القطعين الناقصين الواقعين في مستويي الإسقاط الأفقي والشاقولي . يسقط قطر الدائرة الأفقي على مستوي الإسقاط الأفقي بقيته الحقيقية ويوافق القطر الكبير للقطع الناقص أما القطر العمودي عليه فيسقط بغير قيمته الحقيقية ويبقى متعامداً عليه مشكلاً القطر الصغير للقطع الناقص .

وبصورة مشابهة يسقط القطر الجانبي للدائرة على مستوي الإسقاط الشاقولي بقيته الحقيقية ويوافق القطر الكبير للقطع الناقص أما القطر العمودي عليه فيسقط بغير قيمته الحقيقية ويبقى متعامداً عليه مشكلاً القطر الصغير للقطع الناقص .

طريقة الإنشاء : ١ - نطبق المستوي المفروض مثلاً على مستوي الإسقاط الأفقي ونعين مطبق النقطة C منه C_0 - مركز الدائرة .

٢ - نرمم من C_0 دائرة نصف قطرها 20 mm ، ونرسم فيها قطرين متعامدين الأول يوازي الأثر P_{11} والآخر عمودياً عليه ، كما نرمم قطرين متعامدين آخرين أحدهما يوازي P_{11} والثاني عمودياً عليه . بعد ذلك نعين المسططين الأفقيين للقطرين الأولين ثم المسططين الشاقوليين للقطرين الآخرين .
الإنشاء مبين على الشكل .

نتائج :

١ - المحاور الرئيسية للقطع الناقص على مستوي الإسقاط الأفقي هي المساط الأفقية لقطرين متعامدين أحدهما يوازي المستوي H (أفقي) .

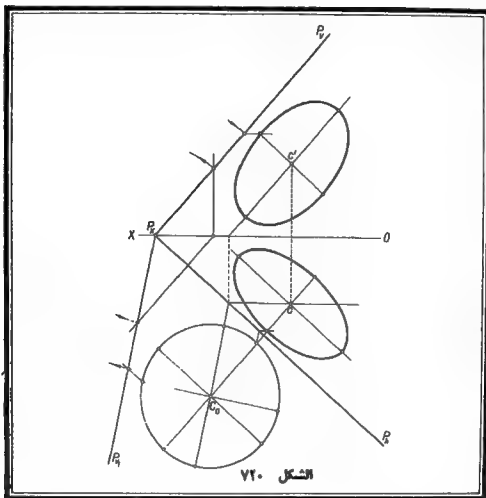
٢ - المحاور الرئيسية للقطع الناقص على مستوي الإسقاط الشاقولي هي المساط الشاقولية لقطرين متعامدين أحدهما يوازي المستوي V (جبهى) .

● المثال ٢٣٠ : ارسم مسططي مخروط دائري قائم تقع قاعدته في المستوي P علماً بأن نصف قطر القاعدة يساوي 20 mm وارتفاع المخروط $h = 55$ mm ومحوره ينطبق على المستقيم $(1,1')$ (الشكل ٧٢١) .

الحل : نوجد النقطة (c,c') تقاطع المستقيم $(1,1')$ مع المستوي P أي مركز قاعدة المخروط . نطبق المستوي P على مستوي الإسقاط الشاقولي . بإيجاد مطبق النقطة C_0 نرمم منها دائرة بنصف القطر المفروض 20 mm . بمعرفة مطبق قاعدة المخروط نوجد مسططها « للتفصيل انظر المثال ٢٢٩ » .

لإيجاد النقطة (s,s') - ذروة المخروط - نأخذ على المستقيم $(1,1')$ ومن النقطة (c,c') قطعة طولها 55 mm ثم نرمم مسططي المولدات الجانبية $(s's)$ بماسة لكل من القطعين الناقصين .

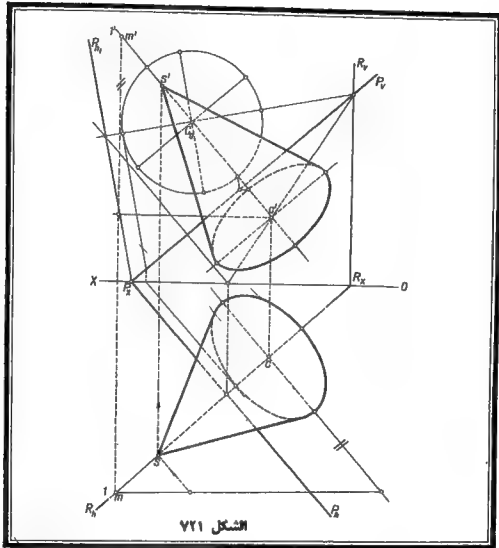
● المثال ٢٢١ : ارسم مسططي مكعب قاعدته ABCD ، حيث ينطبق أحد أضلاعه



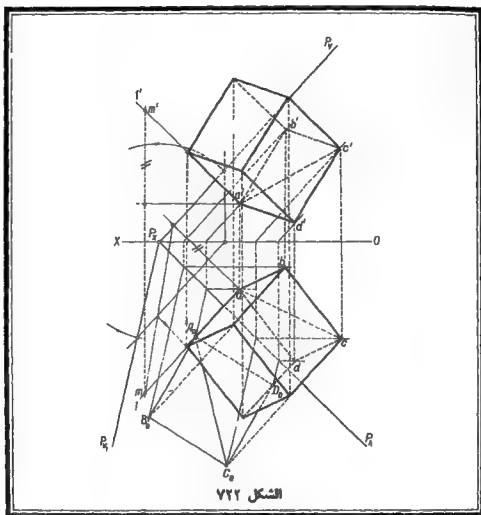
الشكل ٧٢٠

الجانبية على المستقيم $(1,1')$ إذا أعطي المسقط الشاقولي للقطر AC (الشكل ٧٢٢) .

الحل : تقع قاعدة المكعب ABCD في المستوي P العمودي على المستقيم $(1,1')$ المار من النقطة (a,a') . بمعرفة المسقط الشاقولي (a') لرأس القاعدة (a,a') نوجد مسقط الأفقي (a) على المسقط الأفقي للمستقيم $(1,1')$. نرمم من النقطة (a,a') مستويًا P



عمودياً على المستقيم $(1,1')$ ونوجد المسقط الأفقي (ac) للقطر. نطبق هذا المستوي على مستوي الإسقاط الأفقي ونوجد مطابق القطر A_0C_0 ثم نرمم عليه المربع $A_0B_0C_0D_0$ أي قاعدة المكعب بعمق المطبق $A_0B_0C_0D_0$ لقاعدة المكعب. نوجد مسقطها $(abcd)$ و $(a'b'c'd')$. نرفع من النقاط (b,b') ، (c,c') ، (d,d') أعمدة على المستوي P ونأخذ عليها قطعاً



متساوية وتساوي ضلع القاعدة . ثم نصل نهايات هذه الأعمدة . على الشكل نبين الخطوط
المروية وغير المروية .

● المثال ٧٢٢ : أسقط من C عموداً على المستقيم AB . حل المسألة بطريقة الدوران
حول مستقيم أفقي وجبهي (الشكل ٧٢٣ ، ٧٢٤) .

الحل :

١ - الدوران حول مستقيم أفقي :

نرسم من النقطة (c, c') مستقيماً أفقياً يقطع المستقيم $(ab, a'b')$ في النقطة (k, k') . بتدوير المستقيم المفروض حول المستقيم الأفقي نطبقه على المستوى الأفقي R المار من هذا المستقيم الأفقي . بما أن النقطة (k, k') من المستقيم $(ab, a'b')$ واقعة في المستوى R لذلك يجب أن توجد في هذا المستوى مطبق النقطة الأخرى (a, a') . لهذا نقط من النقطة a عموداً على المسقط الأفقي (ck) للمستقيم الأفقي ، ومن النقطة a' ونصف قطر A يساوي نصف قطر الدوران للنقطة (a, a') نرمس قوساً يقطع العمود في النقطة A_0 . نصل النقطة k و A_0 بمستقيم kA_0 ونسقط عليه من النقطة c عموداً . في نقطة التقاطع نحصل على قاعدة العمود - النقطة D_0 . نسقط بصورة عكسية من النقطة D_0 عموداً على المسقط الأفقي (ck) للمستقيم الأفقي ، فتقاطعه مع المستقيم ab نحصل على المسقط الأفقي (d) لقاعدة العمود . نوجد المسقط الشاقولي (d') على المستقيم $a'b'$. نصل النقاط (c, c') و (d, d') فنحصل على المستقيم $(cd, c'd')$:

٢ - الدوران حول مستقيم جيهي :

نرسم من النقطة (c, c') مستقيماً جيهياً يقطع المستقيم $(ab, a'b')$ في النقطة (k, k') ، وتدوير المستقيم المفروض حول المستقيم الجيهي نطبقه على المستوى الجيهي R المار من هذا المستقيم . بما أن النقطة (k, k') من المستقيم $(ab, a'b')$ واقعة في المستوى R لذا يجب أن نعين في هذا المستوى نقطة أخرى (a, a') منه . لهذا نقط من النقطة a' عموداً على المسقط الشاقولي $(c'k')$

للمستقيم الجيبي ، ومن النقطة β' وينصف قطر $\beta'A$ مساو لنصف قطر دوران النقطة (a, a') نرسم قوساً يقطع العمود في النقطة A_0 . نصل النقطتين A_0, k' بالمستقيم $k'A_0$ ونسقط عليه من النقطة c' عموداً ، وفي نقطة التقاطع نحصل على أساس العمود - النقطة D_0 . نسقط بصورة عكسية من النقطة D_0 عموداً على المسقط الشاقولي $(c'k')$ للمستقيم الجيبي ويتقاطعه مع المستقيم $a'b'$ نجد المسقط الشاقولي (d') لأساس العمود بعدها نوجد المسقط الأفقي (d) على المستقيم ab . نصل النقطتين (c, c') و (d, d') فنصل على المستقيم المطلوب .

نتيجة : يستحسن استعمال الدوران حول مستقيم أهلي أو جيبي عندما تعطى جميع العناصر في مستوي واحد .

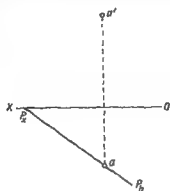
مسائل

٣٨٤ - طبق المستوي P على المستوي H ، ثم أوجد مطبق النقطة A منه (الشكل ٧٢٥ - ٧٣٠) .

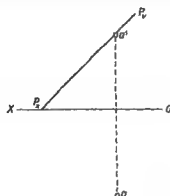
٣٨٥ - طبق المستوي E' على المستوي V ، ثم أوجد مطبق النقطة A منه (الشكل ٧٢٥ - ٧٣٠) .

٣٨٦ - ارسم مسطبي النقطة A الواقعة في المستوي P إذا علم مطبق النقطة A على المستوي H (الشكل ٧٣١ - ٧٣٤) .

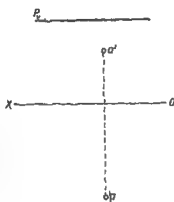
٣٨٧ - ارسم مسطبي النقطة A الواقعة في المستوي P إذا علم مطبق النقطة A على المستوي V (الشكل ٧٣٥ - ٧٣٨) .



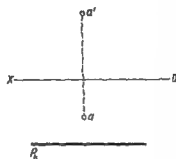
الشكل ٧٢٥



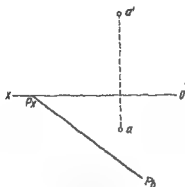
الشكل ٧٢٦



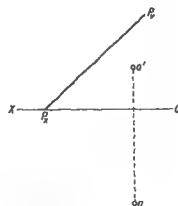
الشكل ٧٢٧



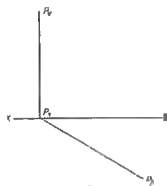
الشكل ٧٢٨



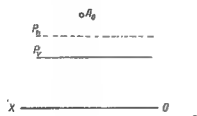
الشكل ٧٢٩



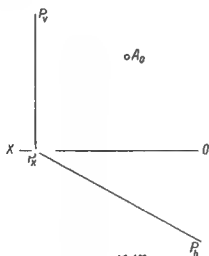
الشكل ٧٣٠



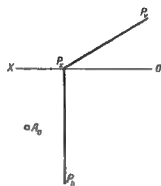
الشكل ٧٢١



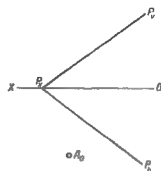
الشكل ٧٢٢



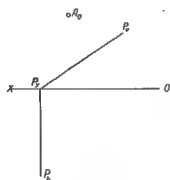
الشكل ٧٢٣



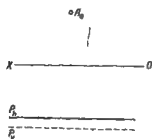
الشكل ٧٢٤



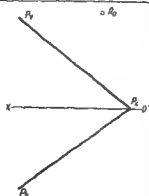
الشكل ٧٢٥



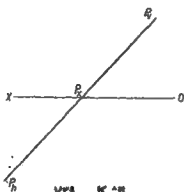
الشكل ٧٢٦



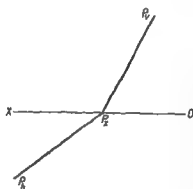
الشكل ٧٣٧



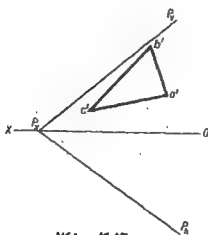
الشكل ٧٣٨



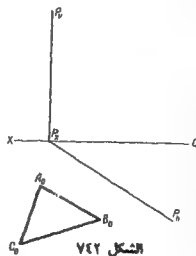
الشكل ٧٣٩



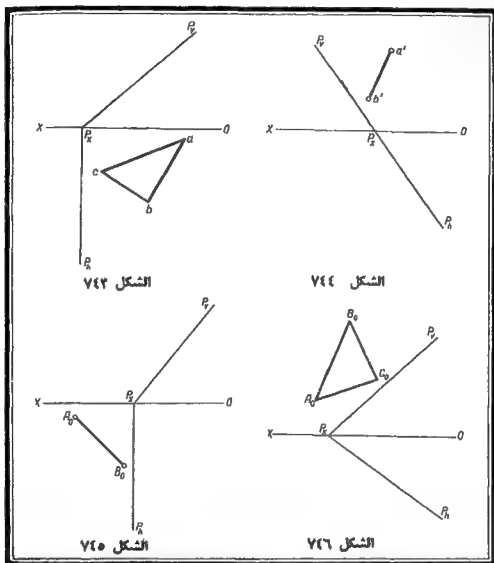
الشكل ٧٤٠



الشكل ٧٤١

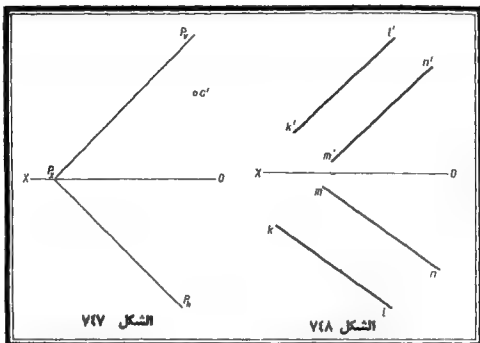


الشكل ٧٤٢



٣٨٨ - ارسم في المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن انزي ذلك المستوي (الشكل ٧٣٩، ٧٤٠).

٣٨٩ - ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ المتساوية البعد عن رؤوس



المثلث ABC (الشكل ٧٤١) .

٣٩٠ - ارسم مساقط المثلث ABC الواقع في المستوي P إذا علم مطابق

المثلث على المستوي H (الشكل ٧٤٢) .

٣٩١ - عين مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC الواقع في المستوي P

(الشكل ٧٤٣) .

٣٩٢ - ارسم مساقط المربع ABCD الواقع في المستوي P إذا عرفت ضلعه AB

(الشكل ٧٤٤) .

٣٩٣ - ارسم مساقط المثلث المتساوي الأضلاع ABC الواقع في المستوي P إذا

أعطيت مطابق للضلع A_1B_1 على المستوي H (الشكل ٧٤٥) .

٣٩٤ - ارسم مساقط المثلث ABC الواقع في المستوى P إذا أعطي مطبق المثلث على المستوى V (الشكل ٧٤٦) .

٣٩٥ - ارسم في المستوى P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن نقطة منه C بمقدار 20 mm (الشكل ٧٤٧) .

٣٩٦ - ارسم في المستوى P دائرة مركزها C وتمس الأثر الشاقولي لهذا المستوى (الشكل ٧٤٧) .

٣٩٧ - ارسم دائرة نصف قطرها 20 mm في المستوى P وتمس أثره (الشكل ٧٣٩) .

٣٩٨ - ارسم دائرة مماسة داخلياً للمثلث ABC الواقع في المستوى P (الشكل ٧٤١) .

٣٩٩ - ارسم دائرة مارة من رؤوس المثلث ABC الواقع في المستوى P (الشكل ٧٤١) .

٤٠٠ - ارسم دائرة تمس أثره في المستوى P وتقر من نقطة A من هذا المستوى . أعط حلاً واحداً (الشكل ٧٣٠) .

ملاحظة : حل المسائل ٤٠١ - ٤١٢ بدوران حول مستقيم أفقي أو جيبى

٤٠١ - أوجد الشكل الحقيقي للمثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٢ - ارسم منصف الزاوية A للمثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٣ - أوجد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٤ - أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٥ - أسقط عموداً من النقطة C على المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .

٤٠٦ - أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة C بمقدار 25 mm (الشكل ٦٣٦، ٦٣٧) .

٤٠٧ - مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية φ تساوي 30° أو 45° أو 60° (الشكل ٦٣٧) .

٤٠٨ - ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC تقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٤٠٩ - ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC تقع على المستقيم MN إذا كانت الزوايا $B = C = \varphi$ (الشكل ٦٥١) .

٤١٠ - ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٤١١ - اقطع المستقيمين المتوازيين KL و MN بمستقيمين آخرين بحيث نحصل على مربع ABCD (الشكل ٧٤٨) .

٤١٢ - اقطع المستقيمين المتوازيين KL و MN بمستقيمين آخرين بحيث نحصل على معين ABCD زاويته الحادة $B = 60^\circ$ (الشكل ٧٤٨) .

البحث التاسع عشر

تبديل مستويات الإسقاط

عند تبديل أي مستوي إسقاط بآخر يجب المحافظة على التعامد بين مستويات الإسقاط الجديدة عندها مسقطا النقطة في الجلة الجديدة سيقعا على عمود واحد على خط الأرض الجديد .

عند تبديل مستوي الإسقاط الأفقي القديم بآخر جديد ($\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H_1}$) نجد أن :

١ - النقطة يمكن أن تنتقل من الربع الأول إلى الربع الرابع ومن الثاني إلى الثالث وبالعكس .

٢ - وضعية المسقط الشاقولي للنقطة لا تتغير .

٣ - بعد المسقط الأفقي للنقطة عن خط الأرض في الجلة الجديدة والقديمة واحد لا يتغير
($a_1 a_{21} = a a_2$) .

عند تغيير مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد ($\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H_1}$) نجد أن :

١ - النقطة يمكن أن تنتقل من الربع الأول إلى الثاني ومن الثالث إلى الرابع وبالعكس .

٢ - وضعية المسقط الأفقي للنقطة لا تتغير .

٣ - بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن خط الأرض في الجلة الجديدة والقديمة واحد لا يتغير ($a'_1 a_{21} = a' a_2$) .

قاعدة : لاييجاد المسقط الشاقولي (الأفقي) لنقطة على مستوي الإسقاط الشاقولي (الأفقي) الجديد يجب أن نسط عموداً من المسقط الأفقي (الشاقولي) للنقطة على خط الأرض الجديد ومن نقطة التقاطع نأخذ بالاتجاه المناسب قطعة مساوية لبعد المسقط الشاقولي (الأفقي) القديم للنقطة عن خط الأرض القديم .

أمثلة

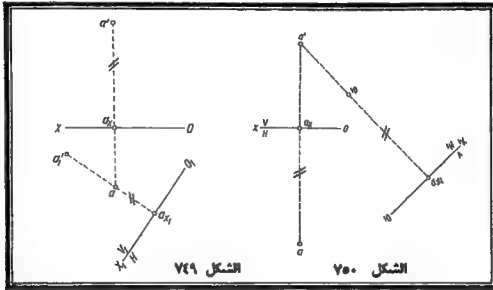
● **المثال ٢٣٣ :** النقطة A معطاة في الربع الأول . أوجد مقلطها في الجلة $\frac{V_1}{H}$ (الشكل ٧٤٩) :

الحل : نعين قبل كل شيء في أي ربع ستقع النقطة في الجلة الجديدة . المسقط الأفقي (a) للنقطة في الجلة القديمة يقع تحت خط الأرض أي في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي . وفي الجلة الجديدة المسقط الأفقي (a) للنقطة يقع فوق خط الأرض (o_1x_1) أي في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي . بناء عليه فالنقطة المطلوبة في الجلة الجديدة ستقع في الربع الثاني .

ولهذا نرسم من النقطة a عموداً على o_1x_1 ونأخذ عليه نحو الأعلى واعتباراً من النقطة a_{11} قطعة مساوية $a'a_{11}$ فنهايتها تحدد المسقط الشاقولي الجديد (a'_1) للنقطة .

● **المثال ٢٣٤ :** النقطة A معطاة في الربع الأول . أوجد مقلطها في الجلة $\frac{V}{H_1}$ (الشكل ٧٥٠) .

الحل : نعين في أي ربع ستقع النقطة في الجلة الجديدة . المسقط الشاقولي



(a') للنقطة في الجملة القديمة يقع فوق خط الأرض أي في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي . وفي الجملة الجديدة يقع المسقط الشاقولي (a') تحت خط الأرض (o_1x_1) أي في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي . بناء عليه فالنقطة المطلوبة في الجملة الجديدة ستكون في الربع الرابع .

لهذا نرم من النقطة a' عموداً على o_1x_1 ونأخذ عليه نحو الأسفل إعتباراً من النقطة a_{11} قطعة مساوية $a_{11}a_{12}$ ، فنهايتها تحدد المسقط الأفقي الجديد (a_1) للنقطة a .
● المثال ٢٣٥ : لدينا قطعة AB . أوجد مسقطها الجديين إذا كانت في الجملة الجديدة تشغل وضعية جبية (الشكل ٧٥١) .

الحل : حتى تكون القطعة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي يجب أن يكون مسقطها الأفقي موازياً لخط الأرض . نرم خط الأرض o_1x_1 موازياً للمسقط

الأفقي (ab) للقطعة وكما بينا سابقاً بإيجاد المسطتين الشاقوليين (a'_1) و (b'_1)
للتقتين نحصل على المسقط الشاقولي ($a'_1b'_1$) للقطعة في الجملة الجديدة .

● المثال ٢٣٦ : لدينا قطعة AB . أوجد مسطليها الجديدين إذا كانت في الجملة
الجديدة تشغل وضعية أفقية (الشكل ٧٥٢) .

الحل : حتى تكون القطعة أفقية يجب أن يكون مسطحها الشاقولي موازياً
لخط الأرض . نرمم خط الأرض o_1x_1 موازياً للمسقط الشاقولي ($a'b'$) للقطعة
وكما بينا سابقاً بإيجاد المسطتين الأفقيين (a_1) و (b_1) للتقتين نحصل على
المسقط الأفقي (a_1b_1) للقطعة في الجملة الجديدة .

● المثال ٢٣٧ : لدينا قطعة AB . أوجد مسطليها الجديدين إذا كانت في الجملة
الجديدة تشغل وضعية شاقولية (الشكل ٧٥٣) .

الحل : كي تكون القطعة شاقولية يجب أن يكون مسطحها الشاقولي عمودياً
على خط الأرض . نرمم خط الأرض o_1x_1 عمودياً على المسقط الشاقولي ($a'b'$)
للقطعة وكما بينا سابقاً نوجد مسطحها الأفقي (a_1b_1) بشكل نقطة .

● المثال ٢٣٨ : لدينا قطعة AB . أوجد مسطليها الجديدين إذا كانت في الجملة
الجديدة تشغل وضعية أمامية (الشكل ٧٥٤) .

الحل : كي تكون القطعة أمامية يجب أن يكون مسطحها الأفقي عمودياً على
خط الأرض . نرمم خط الأرض o_1x_1 عمودياً على المسقط الأفقي (ab) للقطعة،
وكما بينا سابقاً نوجد مسطحها الشاقولي ($a'_1b'_1$) بشكل نقطة .

● المثال ٢٣٩ : لدينا قطعة AB . أوجد مسطليها الجديدين إذا كانت في الجملة

الجديدة تشغل وضعية أمامية (الشكل ٧٥٥) .

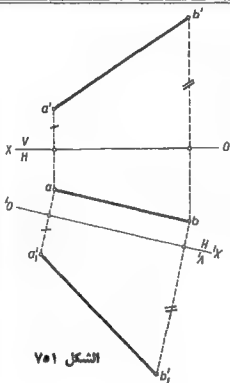
الحل : لحل المسألة يجب أن نستعمل على التوالي تبديلين لمستويات الإسقاط
 $(\frac{V}{H_1}, \frac{V_2}{H_1})$. نرمم مسطوي القطعة $(ab, a'b')$ في الجلة $\frac{V}{H_1}$ بحيث تشغل القطعة
 وضعية أفقية ، بعد ذلك نرمم مسطوي القطعة $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ في الجلة $\frac{V_2}{H_1}$ بحيث
 تشغل القطعة وضعية أمامية . الإنشاء مبين على الشكل .

● المثال ٢٤٠ : لدينا قطعة AB . أوجد مسطويها الجديدين إذا كانت في الجلة الجديدة
 تشغل وضعية شاقولية (الشكل ٧٥٦) .

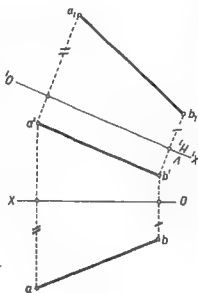
الحل : لحل المسألة يجب أن نستعمل على التوالي تبديلين لمستويات الإسقاط
 $(\frac{V_1}{H}, \frac{V_1}{H_2})$. نرمم مسطوي القطعة $(ab, a'b')$ في الجلة $\frac{V_1}{H}$ بحيث تشغل القطعة
 وضعية جبهة بعد ذلك نرمم مسطوي القطعة $(ab, a'_1b'_1)$ في الجلة $\frac{V_1}{H_2}$ بحيث
 تشغل القطعة وضعية شاقولية . الإنشاء مبين على الشكل .

● المثال ٢٤١ : ارسم أثري المستوي P في الجلة $\frac{V_1}{H}$ (الشكل ٧٥٧) .

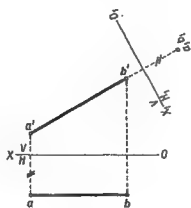
الحل : الأثر الأفقي (P_h) للمستوي يبقى دون تغيير . عند تقاطع الأثر
 الأفقي (P_h) للمستوي مع خط الأرض الجديد o_1x_1 نحصل على نقطة إلتقاء الأثرين
 الجديدة (P_{h1}) . حسب ماهو معطى P_h عمودي على o_1x_1 وهذا يعني أنه في الجلة
 الجديدة يكون المستوي المفروض أمامياً . لإيجاد اتجاه الأثر الشاقولي الجديد (P_{v1})
 نأخذ في المستوي نقطة ما (a, a') ونوجد مسطويها الشاقولي الجديد (a'_1) . نرمم
 من التقطين a'_1 و P_{h1} الأثر الشاقولي الجديد (P_{v1}) للمستوي .



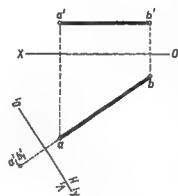
الشكل ٧٠١



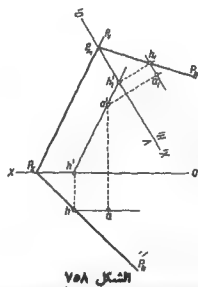
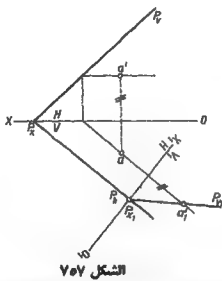
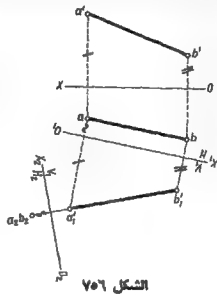
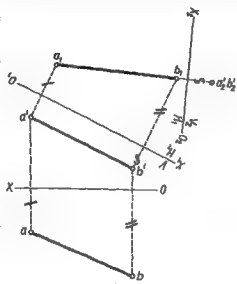
الشكل ٧٠٢



الشكل ٧٠٣



الشكل ٧٠٤



● المثال ٢٤٢ : ارمم أثري المستوي P في الجلة $\frac{V}{H_1}$ (الشكل ٧٥٨)

الحل : الأثر الشاقولي (P_1) للمستوي سيبقى دون تغيير . عند تقاطع الأثر الشاقولي (P_1) للمستوي مع خط الأرض الجديد (o_1x_1) نحصل على نقطة الالتقاء الأثرين الجديدة (P_{21}) . لإيجاد اتجاه الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي نأخذ على المستوي باستخدام مستقيم جهبي نقطة ما (a, a') ونعيناها في الجلة الجديدة ثم نرمس من هذه النقطة مستقيماً جهبياً . بعد ذلك نعين الأثر الأفقي لهذا المستقيم الجهبي ثم نرمس الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي من النقطتين h_1 و P_{21} .

ملاحظة : أحياناً نخرج النقطة P_{21} من حدود الشكل ، في هذه الحالة نستعمل مستقيمين جهبيين . وبإيجاد النقطتين h_1 و h_2 نرمس منها الأثر P_{h1} .

● المثال ٢٤٣ : لدينا مستوي P . ارمم أثره إذا كان في الجلة الجديدة عمودياً على المستوي H (الشكل ٧٥٩) .

الحل : من المعروف أن الأثر الشاقولي للمستوي الشاقولي يجب أن يكون عمودياً على خط الأرض . نرمس خط الأرض الجديد o_1x_1 عمودياً على الأثر P_1 فنقطة التقاطع P_{21} هي نقطة لالتقاء الأثرين الجديدة . لإيجاد اتجاه الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي نأخذ على الأثر P_1 نقطة ما (h, h') ونوجد مسقطها الأفقي الجديد (h_1) . ومن النقطتين P_{21} و h_1 نرمس الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي .

● المثال ٢٤٤ : اسقط عموداً من النقطة C على المستقيم AB (الشكل ٧٦٠) .

الحل : ان امقاط عمود من نقطة على مستقيم على الخطط مباشرة يمكن فقط في تلك الحالة إذا كان المستقيم المقروض موازياً لأحد مستويات الإسقاط (لماذا ؟) .

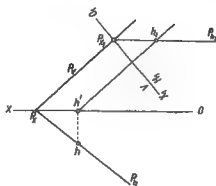
- لهذا نبدل مثلاً المستوي الشاقولي بآخر جديد V_1 يوازي المستقيم AB . نرمم خط الأرض o_1x_1 موازياً (لذا؟) للمستقيم ab ثم نوجد المسقط الشاقولي للمستقيم $(a'_1b'_1)$ والنقطة (c'_1) . نسقط من النقطة c'_1 عموداً على المستقيم $a'_1b'_1$ ويتقاطعا بمحل على المسقط الشاقولي (d'_1) للنقطة - أساس العمود . بإيجاد مسقطي أساس العمود (d, d') الأولين نرمم مسقطي العمود المطلوب : الأفقي - من النقطتين d و c والشاقولي - من النقطتين c' و d' .

● المثال ٢٤٥ : بدّل مستويات الإسقاط بأخرى جديدة بحيث ينطبق المسقطان الشاقوليان للمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٧٦١) .

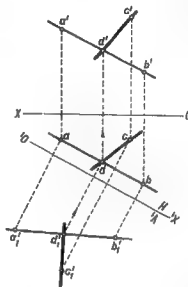
الحل : يعين المستويان المتوازيان AB و CD مستويين . فلكي ينطبق مسقطاهما الشاقوليان يجب أن يكون هذا المستوي في الجملة الجديدة أمامياً . نقطع المستقيمين $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$ بمستقيم أفقي ما $(km, k'm')$ ، نرمم خط أرض جديد (o_1x_1) عمودي على المستقيم km (لذا؟) نعين المسقطين الشاقولين الجديدين $(a'_1b'_1)$ و $(c'_1d'_1)$ اللذان ينطبقان إذا تأمنت الدقة الكافية في الرسم .

● المثال ٢٤٦ : أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٧٦٢) .

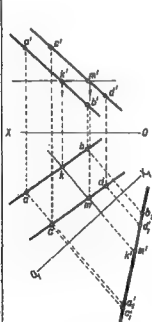
الحل : يقع مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث في نقطة تقاطع محاوره . لكي نرمم هذه المحاور يجب معرفة الشكل الحقيقي للمثلث . ولهذا يجب أن يكون مستوي المثلث موازياً لأحد مستويات الإسقاط مثلاً الأفقي . نستعمل قديبلين متتالين لمستويات الإسقاط . في البدء نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي



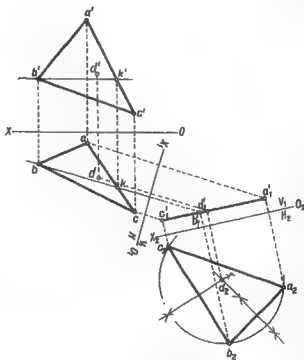
الشكل ٧٥٩



الشكل ٧٦٠



الشكل ٧٦١



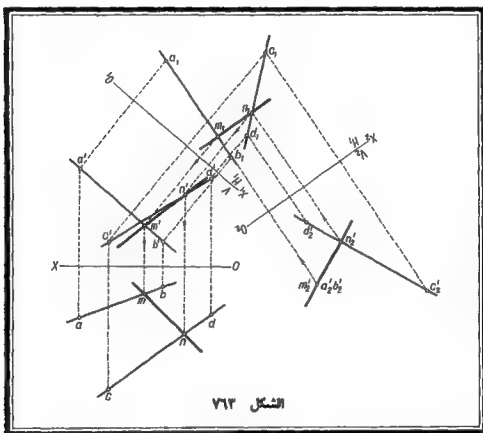
الشكل ٧٦٢

بآخر جديد (V_1) عمودي على مستوي المثلث ثم نبذل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_2) موازي لمستوي المثلث . نرمم مستقيماً أفقياً (b_k, b'_k) في مستوي المثلث ونختار خط أرض جديد (o_1x_1) عمودي (لماذا؟) على المسقط الأفقي (b_k) للمستقيم الأفقي . نوجد المسقط الشاقولي للمثلث ($a'_1b'_1c'_1$) بشكل مستقيم .

بعد ذلك نرمم خط أرض جديد (o_2x_2) موازياً (لماذا؟) للمسقط الشاقولي للمثلث ($a'_1b'_1c'_1$) ونوجد مسقطه الأفقي . المثلث $a_2b_2c_2$ يمثل الشكل الحقيقي للمثلث ABC . نوجد مركز الدائرة (d_2) المارة من رؤوس المثلث $a_2b_2c_2$ ثم نوجد مسقطي المركز (d, d') في الوضعية الأولى على المخطط . الإنشاء مبين على الشكل .

● المثال ٢٤٧ : اقطع المستقيمين المتخالفين AB و CD بمستقيم MN عمودي عليها (الشكل ٧٦٣) .

الحل : نبذل مستويات الإسقاط بلخرى جديدة يكون فيها أحد المستويات مثلاً الشاقولي عمودياً على المستقيم AB (أو على CD) : نبذل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_1) يوازي AB لهذا نرمم خط الأرض (o_1x_1) موازياً للمستقيم $a'b'$ ثم نوجد المسطتين الأفقيين (a_1b_1) و (c_1d_1) للمستقيمين المفروضين . نبذل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_2) عمودي على المستقيم A_1B_1 . لهذا نرمم خط الأرض (o_2x_2) عمودياً على المستقيم a_1b_1 ثم نوجد المسطتين الشاقوليين ($a'_2b'_2$) و ($c'_2d'_2$) للمستقيمين المفروضين . نقطع المستقيمين الحاصلين ($a_1b_1, a'_2b'_2$) و ($c_1d_1, c'_2d'_2$) بمستقيم عمودي عليهما ($m_1n_1, m'_2n'_2$) ، بعد ذلك نوجد مسقطي

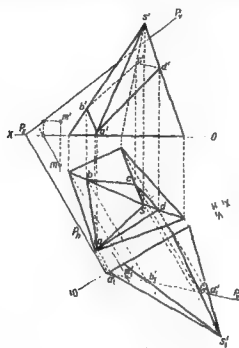


الشكل ٧٦٣

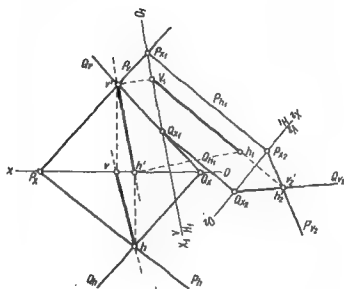
($mn, m'n'$) المستقيم المطلوب في وضعه الأولى . الإنشاء مبن على الشكل .

ملاحظة : إذا كان أحد المستقيمين موازياً لأحد مستويات الإسقاط فيكفي

تبديل واحد .



الشكل ٧١٤



الشكل ٧١٥

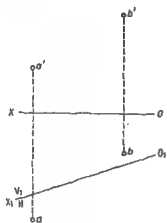
• المثال ٢٤٨ : أوجد خط تقاطع سطح هرم مع مستوي P (الشكل ٧٦٤) .

الحل : لرسم خط التقاطع يجب أن نبحت عن نقاط تقاطع حروف الهرم مع المستوي . بما أن المستوي P كفي فيفضل تبديل مستويات الإسقاط بحيث يصبح المستوي P أمامياً في البلمة الجديدة . نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (v_1) ونرسم خط الأرض (o_1x_1) عمودياً على الأثر P_h ثم نعين الأثر الشاقولي P_{v_1} والمسقط الشاقولي للهرم . بإيجاد المسقط الشاقولي لخط التقاطع $(a'b'c'd')$ نحصل على مسطقي خط التقاطع $(abcd)$ و $(a'b'c'd')$ في الوضعية الأولى على المخطط . الانشاء معين على الشكل .

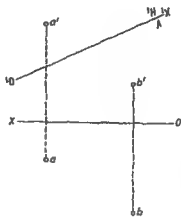
• المثال ٢٤٩ : بدّل مستويات الإسقاط بأخرى جديدة بحيث يصبح المستويان Q و P أماميين . (الشكل ٧٦٥) .

الحل : كي يكون المستويان Q و P أماميين يجب أن يكون مستوي الإسقاط الشاقولي الجديد عمودياً على الفصل المشترك للمستويين . نوجد الفصل المشترك $(h'v, h'v')$ للمستويين Q و P ، ثم نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_1) يوازي الفصل المشترك للمستويين . نرسم خط الأرض (o_1x_1) موازياً للمستقيم $h'v'$ ونوجد الأثرين الأفقيين (P_{h_1}) و (Q_{h_1}) الموازيين للمستقيم h_1v_1 . بعد ذلك نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بجديد (v_2) . نرسم خط الأرض (o_2x_2) عمودياً على المستقيم h_1v_1 ثم نوجد الأثرين الشاقولين (P_{v_2}) و (Q_{v_2}) للمستويين المفروضين المارين من النقطة $h'_2v'_2$.

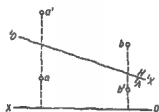
ملاحظة : إذا كان المستويان متقاطعين وفق مستقيم أفقي أو جبهي فيكفي تبديل واحد (لماذا ؟) .



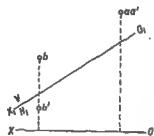
الشكل ٧٦٦



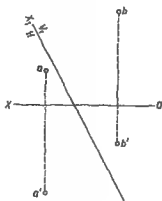
الشكل ٧٦٧



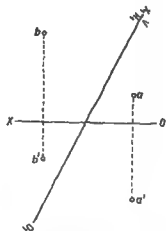
الشكل ٧٦٨



الشكل ٧٦٩



الشكل ٧٧٠



الشكل ٧٧١

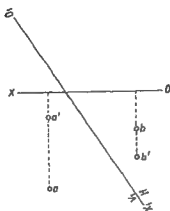
اسئلة للاختبار الشخصي

- ١ - ماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستقيم شاقولي ؟
- ٢ - ماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستقيم أمامي ؟
- ٣ - ما هو أنسب وضع للعناصر في تعيين بعد نقطة عن مستقيم ؟
- ٤ - ماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين شاقولين ؟
- ٥ - ماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين أماميين ؟
- ٦ - ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين البعد بين مستقيمين متوازيين ؟
- ٧ - ماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين متخالفين أحدهما شاقولي ؟
- ٨ - ماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين متخالفين أحدهما أمامي ؟
- ٩ - ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين البعد بين مستقيمين متخالفين ؟
- ١٠ - ماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستوي شاقولي ؟
- ١١ - ماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستوي أمامي ؟
- ١٢ - ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين بعد نقطة عن مستوي ؟
- ١٣ - ماذا يقاس على المخطط البعد بين مستويين متوازيين شاقولين ؟
- ١٤ - ماذا يقاس على المخطط البعد بين مستويين متوازيين أماميين ؟
- ١٥ - ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين البعد بين مستويين متوازيين ؟
- ١٦ - ماذا تقاس على المخطط زاوية ميل مستوي شاقولي على مستوي الإسقاط الشاقولي ؟
- ١٧ - ماذا تقاس على المخطط زاوية ميل مستوي أمامي على مستوي الإسقاط الأفقي ؟
- ١٨ - ما هو أنسب وضع للمستويات عند تعيين زوايا ميلها على مستويات الإسقاط ؟
- ١٩ - ماذا تقاس على المخطط الزاوية بين مستويين شاقولين ؟

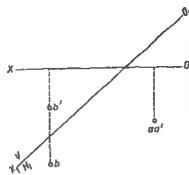
- ٢٠ - بإذا تكافى على الخطط الزاوية بين مستويين أماميين ؟
 ٢١ - ما هو أنسب وضع للمستويين عند تعيين الزاوية بينهما ؟

مسائل

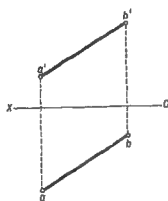
- ٤١٣ - ارسم مساطق التقطين A و B في الجملة الجديدة المفروضة
 (الشكل ٧٦٦ - ٧٧٣) .
 ٤١٤ - ارسم مسطقي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون أفقياً
 (الشكل ٧٧٤ ، ٧٧٥) .
 ٤١٥ - ارسم مسطقي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون
 جيباً (الشكل ٧٧٤ ، ٧٧٥) .
 ٤١٦ - ارسم مسطقي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون شاقولياً
 (الشكل ٧٧٦ ، ٧٧٧) .
 ٧١٧ - ارسم مسطقي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون أمامياً
 (الشكل ٧٧٧ ، ٧٧٨) .
 ٤١٨ - ارسم أثري المستوي P في الجملة الجديدة المفروضة (الشكل ٧٧٩ ، ٧٨٠) .
 ٤١٩ - ارسم أثري المستوي P في الجملة الجديدة بحيث يصبح شاقولياً
 (الشكل ٧٣٩ ، ٧٤٠) .
 ٤٢٠ - ارسم أثري المستوي P في الجملة الجديدة بحيث يصبح أمامياً
 (الشكل ٧٣٩ ، ٧٤٠) .
 ٤٢١ - ارسم مساطق المستقيمين المتوازيين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون
 مقطاهما الاقنيان منطبقين على بعضها (الشكل ٦٣٩) .



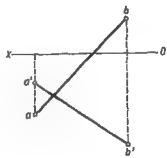
الشكل ٧٧٢



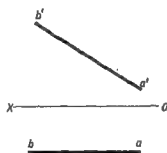
الشكل ٧٧٣



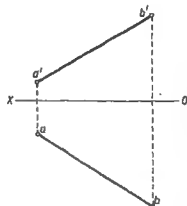
الشكل ٧٧٤



الشكل ٧٧٥



الشكل ٧٧٦



الشكل ٧٧٧

٤٢٢ - ارسم مساقط المستقيمين المتوازيين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون مسطاهما الشاقوليان منطبقين على بعضها (الشكل ٦٣٩) .

٤٢٣ - ارسم مساقط المستقيمين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون مسطاهما الأتقيان متوازيين (الشكل ٥٧٨) .

٤٢٤ - ارسم مساقط المستقيمين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون مسطاهما الشاقوليان متوازيين (الشكل ٥٧٨) .

٤٢٥ - ارسم مسطبي المثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ في الجملة الجديدة بحيث يصبح مسطبه الأفقي خطاً مستقيماً (الشكل ٦٠٠) .

٤٢٦ - ارسم مسطبي المثلث ABC في الجملة الجديدة بحيث يصبح مسطبه الشاقولي خطاً منطبقاً (الشكل ٦٠٠) .

٤٢٧ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٦٦ ، ٤٦٧) .

٤٢٨ - ارسم مسطبي المثلث ABC في الجملة الجديدة إذا كان مسطبه الأفقي يمثل الشكل الحقيقي للمثلث (الشكل ٦٠٠) .

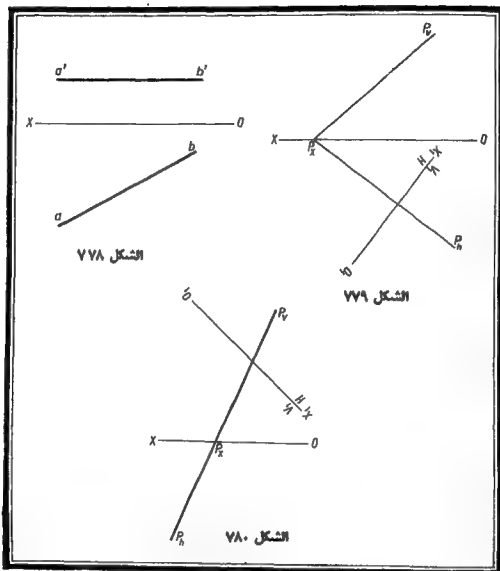
٤٢٩ - ارسم مسطبي المثلث ABC في الجملة الجديدة إذا كان مسطبه الشاقولي يمثل الشكل الحقيقي للمثلث (الشكل ٦٠٠) .

٤٣٠ - أوجد مركز ثقل محيط المثلث ABC (الشكل ٦٠٠) .

٤٣١ - أوجد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ٦٠٠) .

٤٣٢ - أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٦٠٠) .

٤٣٣ - ارسم مساقط المستقيمين AB و CD في الجملة الجديدة بحيث يصبح المستقيم AB شاقولياً (الشكل ٥٧٨) .



٤٣٤ - ارمم مساقط المستقيمين AB و CD في الجملة الجديدة بحيث يصح المستقيم AB أمامياً (الشكل ١٤٤) .

٤٣٥ - اقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم MN عمودي على المستقيم AB بحيث يكون طول القطعة المحصورة بين المستقيمين مساوياً 20 mm (الشكل ٥٧٨)

- ٤٣٦ - ارمم آثار المستويين P و Q في الجملة الجديدة إذا تطلب أن يكونا متاقولين
(الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤) .
- ٤٣٧ - ارمم آثار المستويين P و Q في الجملة الجديدة إذا تطلب أن يكونا أماميين
(الشكل ٤٠٠ ، ٤٠٨) .

البحث العشرون

تعيين الأبعاد

يعين البعد بين نقطتين والمقاس بطول القطعة الواصلة بينهما بإحدى الطرق التالية :

- ١ - بإنشاء مثلث قائم « انظر المثال ٣٣ » .
- ٢ - بالدوران أو الانتقال . وهنا يلزم تحويل القطعة إلى وضعية موازية لأحد مستويات الإسقاط « انظر الأمثلة ١٩٦ و ١٩٧ » .
- ٣ - بالانطباق . وهنا يجب أن تضم القطعة في مستوي « وللأفضل شاقولي أو أمامي » ثم نطبق هذا المستوي على أحد مستويات الإسقاط .
- ٤ - بتبديل مستويات الإسقاط . وهنا يجب تغيير أحد مستويات الإسقاط بآخر جديد يوازي القطعة المفروضة . « انظر الأمثلة ٢٣٥ و ٢٣٦ » .

امثلة

● المثال ٢٥٠ : لدينا نقطتان B و A . عين البعد بينها (الشكل ٧٨١) .

الحل : نستعمل طريقة الانطباق . نمرر من النقطتين (a' , b') و (b' , b')

مستويًا شاقوليًا R . نطبق هذا المستوي على متوي الإسقاط الأفقي ، نوجد المطبقين B و A للتقطين (a, a') و (b, b') ، وبوصلها نحصل على البعد المطلوب .

يعين البعد بين نقطة ومستقيم بأحدى الطرق التالية :

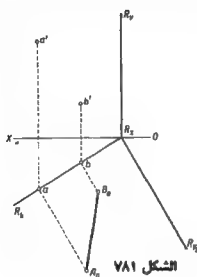
١ - بالطريقة المباشرة : نرمس من النقطة مستويًا عمودياً على المستقيم ثم بإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي نعين طول القطعة بين التقطتين - الجديدة والمفروضة « انظر المثال ١٧٠ » .

٢ - بالدوران أو الانتقال : يجب أن نرمس الجملة المفروضة في وضعية يكون فيها المستقيم المفروض عمودياً على أحد مستويات الإسقاط أو بحيث يصح المستوي المعين بالمستقيم والنقطة موازياً لأحد مستويات الإسقاط .

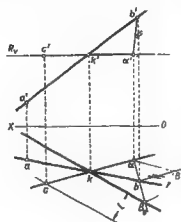
٣ - بالانطباق : يجب أن نعين أحد آثار المستوي المعين بالمستقيم والنقطة ، ثم بالدوران حول هذا الأثر نوجد مطبق النقطة والمستقيم .

٤ - بالدورات حول مستقيم أفقي أو جيهي : يجب أن نمرر من المستقيم الأفقي (الجيهي) في المستوي المعين بالعناصر المفروضة مستويًا R أفقياً (جيهياً) . ثم بالدوران حول المستقيم الأفقي (الجيهي) نوجد مطبق النقطة والمستقيم على هذا المستوي .

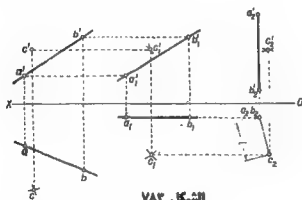
٥ - بتبديل مستويات الإسقاط : يجب تبديل مستويات الإسقاط بأخرى جديدة بحيث يكون أحدها عمودياً على المستقيم المفروض أو موازياً للمستوي المعين بالمستقيم والنقطة .



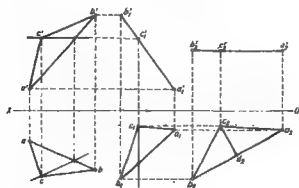
الشكل ٧٨١



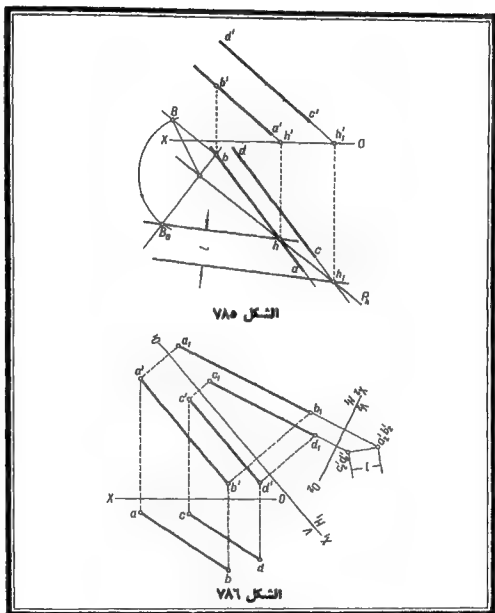
الشكل ٧٨٢



الشكل ٧٨٣



الشكل ٧٨٤



- المثال ٢٥١ : عين بعد النقطة C عن المبتيم AB (الشكل ٧٨٢ - ٧٨٤) .
- الحل : ١ - طريقة الدوران حول مستيم أفقي (الشكل ٧٨٢) : نوم

من النقطة (c, c') مستقيماً أفقياً $(ck, c'k')$ يقطع المستقيم $(ab, a'b')$ في النقطة (k, k') ثم نضمه في مستوي أفقي R .
 التقاط (c, c') و (k, k') تقع في المستوي R . لايجاد مطبق المستقيم على المستوي R يكفي أن نعين نقطة ما أخرى من هذا المستقيم ، مثلاً (b, b') . نقط من النقطة b عموداً على المستقيم ck ، وننصف قطر مساوي αB نرسم من النقطة α قوساً يقطع هذا العمود في النقطة β .
 يوصل النقطة k بـ β نحصل على المطبق (kB_0) للمستقيم المفروض .
 البعد المطلوب هو القطعة l .

٢ - طريقة الانتقال (الشكل ٧٨٣ ، ٧٨٤) : ننقل العناصر المفروضة بصورة أفقية ونوضع المستقيم في وضعية جبهة . بعد ذلك نقلها بصورة جبهة ونوضع المستقيم في وضعية ساقولية . البعد المطلوب l هو البعد بين النقطتين c_2 و a_2b_2 . الإنشاء موضح على الشكل .

باستعمال الانتقال يمكن ان نحل المسألة بالطريقة التالية كذلك : نضم النقطة (c, c') والمستقيم $(ab, a'b')$ في مثلث $(abc, a'b'c')$ وبانتقالين متتاليين نحوله الى وضعية افقية مثلاً .
 البعد المطلوب هو ارتفاع المثلث $c_2b_2a_2$ أي c_2d_2 . الإنشاء مبين على الشكل .
 يمكن تعيين البعد بين مستقيمين متوازيين بأحدى الطرق المذكورة أعلاه لتعيين بعد نقطة عن مستقيم .

● المثال ٢٥٢ : أوجد البعد بين مستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٧٨٥ ، ٧٨٦) .

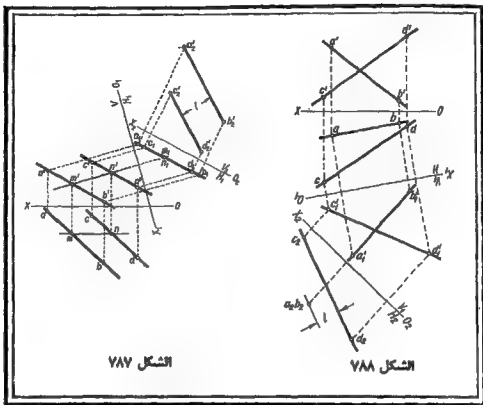
الحل : ١ - طريقة الانطباق (الشكل ٧٨٥) : نعين الآلاف الأقيسة
 (h, h') و (h_1, h'_1) المستقيمين $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$ ونرسم من هاتين
التقطعتين الأثر الأقي (P_h) للمستوي المعين بالمستقيمين المفروضين. بالدوران حول الأثر
 P_h نوجد مطبق المستقيمين $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$ على مستوي الإسقاط الأقي . بما
أن نقطة واحدة (h, h') من المستقيم $(ab, a'b')$ تقع في مستوي الإسقاط الأقي نوجد المطبق B_h
للتقطعة (b, b') فالتقطعتان h و B_h تعينان hB_h مطبق المستقيم $(ab, a'b')$. نعين مطبق
المستقيم $(cd, c'd')$ برسم مستقيم من النقطة h_1 موازياً للمستقيم hB_h (لماذا ؟) .
البعد h بينها هو البعد المطلوب .

٢ - طريقة تبديل مستويات الإسقاط (الشكل ٧٨٦ ، ٧٨٧) : نبذل مستوي
الإسقاط الأقي بآخر جديد (H_1) يوازي المستقيمين المفروضين . بعد ذلك نبذل
مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_2) عمودي على هذين المستقيمين ، فالبعد l
بين المستقيمين الشاقولين $(c_2'd_2')$ و $(a_2'b_2')$ للمستقيمين هو البعد المطلوب . الإنشاء
مين على الشكل :

باستعمال طريقة تبديل مستويات الإسقاط يمكن حل المسألة أيضاً
بالشكل التالي : نبذل مستوي الإسقاط الأقي بآخر جديد (H_1) عمودي على
المستوي المعين بالمستقيمين AB و CD . بعد ذلك نبذل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر
جديد (V_2) مواز للمستوي المفروض . فالبعد l بين المستقيمين المتوازيين $a_2'b_2'$ و $c_2'd_2'$
هو البعد المطلوب . الإنشاء مين على الشكل .

البعد بين مستقيمين متخالفين يمكن أن يتعين بإحدى الطرق التالية :

١ - بالطريقة المباشرة : برسم مستوي R من أحد المستقيمين المفروضين مواز
للمستقيم الآخر ، ثم بتعين البعد من نقطة ما من المستقيم الثاني حتى المستوي



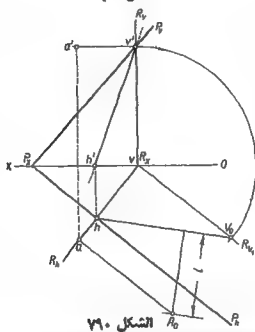
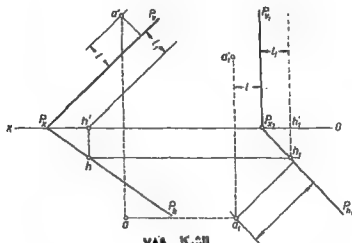
٢- بالدوران أو الانتقال : يجب رسم المستقيمين المفروضين في وضعية يكون فيها أحد المستقيمين عمودياً على أحد مستويات الإسقاط .

٣- بتبديل مستويات الإسقاط : يجب تبديل مستويات الإسقاط بشكل يكون فيه أحدهما عمودياً على أحد المستقيمين المفروضين .

● المثال ٢٥٣ : عين البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٧٨٨) .

الحل : طريقة تبديل المستويات :

نبدل مستوى الإسقاط الشاقولي بأخر جديد (V_1) يوازي المستقيم AB . بعد ذلك



نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_2) عمودي على المستقيم نفسه ، فالبعد l بين المسطحين الأفقيين للمستقيمين هو البعد المطلوب . الإنشاء مبين على الشكل .
يمكن تعيين بعد نقطة عن مستوي بإحدى الطرق التالية :

١ - بالطريقة المباشرة : بإسقاط عمود من النقطة على المستوي نوجد أساس العمود ثم نعين المسافة بين النقطة المفروضة وأساس العمود .

٢ - بالدوران أو الانتقال : يجب رسم الجلة المفروضة في وضعية يكون فيها المستوي عمودياً على أحد مستويات الإسقاط .

٣ - بالإلتحاق : نمر من النقطة مستواً شاقولياً أو أمامياً عمودياً على المستوي المفروض . نطبق المستوي المساعد على أحد مستويات الإسقاط ونوجد مطبق النقطة المفروضة والفصل المشترك للمستويين ، فالبعد l بينها هو البعد المطلوب .

٤ - بتبديل مستويات الإسقاط : يجب تبديل أحد مستويات الإسقاط بآخر جديد عمودي على المستوي المفروض .

● المثال ٢٥٤ : عين بعد النقطة A عن المستوي P (الشكل ٧٨٩ ، ٧٩٠) .

الحل : طريقة الانتقال (الشكل ٧٨٩) : نرم في المستوي P مستقيماً جيباً ما وننقله بصورة موازية للمستوي V مع الجلة كلها ، بحيث يأخذ وضعية شاقولية . نأخذ على خط الأرض نقطة ما P_{21} ونرم منها الأثر الشاقولي (P_{v1}) بصورة عمودية على خط الأرض . ثم نرم بصورة موازية له وعلى بعد l المسط الشاقولي للمستقيم الجببي .
الوضعية الجديدة a_1' للنقطة (a_{08}') تقع على بعد l من الأثر P_{v1} وعلى بعد ما من خط الأرض . بمساعدة a_1' نحصل على a_1 . نرم الأثر الأفقي (P_{21}) من

التقطين P_{x1} و h ، فالعمود النازل من النقطة a_1 على الأثر P_{x1} يعين البعد المطلوب .

٢ - طريقة الانطباق (الشكل ٧٩٠) : نرمس من النقطة (a, a') مستويًا شاقوليًا R عمودياً على P . نوجد الفصل المشترك $(h\nu, h'\nu')$ للمستويين P و R . وينطبق المستوي R على مستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) نوجد المطبق A_0 للنقطة (a, a') و $h\nu$ للمستقيم $(h\nu, h'\nu')$. نسقط من النقطة A_0 عموداً على $h\nu$ فالقطعة l هي البعد المطلوب .

ملاحظة : يمكن أن نرمس من النقطة A مستويًا أماميًا R الخ .

● المثال ٢٥٥ : عين بعد النقطة K عن مستوي المثلث ABC (الشكل ٧٩١) .

الحل : طريقة تبديل مستويات الإسقاط : نبذل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_1) . نرمس من الرأس (a, a') مستقيمًا أفقيًا $(am, a'm')$ في مستوي المثلث ثم نرمس خط أرض جديد (o_1x_1) عمودياً على المقط الأفقي (am) للمستقيم الأفقي .

نوجد المقط الشاقولي (k_1') للنقطة (k, k') والمقطع الشاقولي $(a_1'b_1'c_1')$ للمثلث $(abc, a'b'c')$. نسقط من k_1' عموداً على المقط الشاقولي $a_1'b_1'c_1'$ للمثلث . القطعة l هي البعد المطلوب .

البعد بين مستويين متوازيين يمكن أن يعين بإحدى الطرق المستعملة في تعيين بعد نقطة عن مستوي .

● المثال ٢٥٦ : عين البعد بين مستويين متوازيين P و Q (الشكل ٧٩٢) .

الحل : بطريقة الانتقال نحول المستويين المفروضين إلى وضعية أمامية (شاقولية) .



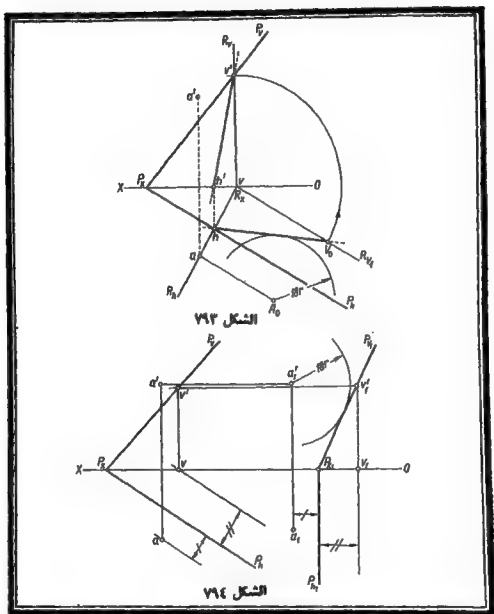
نرسم في المستوي P مستقيماً A_0 ثم ننقل الجملة كلها بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي ، ونوضع المستقيم الأفقي في وضعية أمامية . البعد l بين الأثرين الشاقوليين (P_{v1}) و (Q_{v1}) هو البعد المطلوب . الإنشاء مبين على الشكل .

ملاحظة : بهذه الطريقة يمكن أن نعين البعد بين مستقيمين متخالفين .

● المثال ٢٥٧ : لدينا نقطة A والأثر الأفقي (P_h) للمستوي P الذي يبعد عن النقطة A بمقدار $18mm$. أوجد الأثر الشاقولي لهذا المستوي (الشكل ٧٩٣ ، ٧٩٤) .

الحل : ١ - طريقة الانطباق (الشكل ٧٩٣) : نرمس من النقطة (a, a') مستويًا شاقولياً R عمودياً على المستوي P . نطبق هذا المستوي على مستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) ونوجد النقطة A_0 والأثر R_{v1} . بما أن البعد بين النقطة والمستوي يقاس ببعد النقطة عن الفعل المشترك للتوين P و R لذلك نرمس من النقطة A_0 دائرة نصف قطرها $18mm$ ثم نرمس من النقطة h تقاطع الأثرين P_h و R_{v1} مستقيماً V_0 يس هذه الدائرة ، فيقطع الأثر R_{v1} في النقطة V_0 (معطى حل واحد) . بعد ذلك نوجد v' على الأثر R_{v1} بمساعدة V_0 ثم نرمس من النقطتين P_h و v' الأثر الشاقولي المطلوب (P_v) .

٢ - طريقة الانتقال (الشكل ٧٩٤) : ننقل الجملة المفروضة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي ونحولها إلى وضعية يكون فيها المستوي P أمامياً . بافتراض وضعية المسقط الأفقي (a_1) للنقطة والأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي نوجد المسقط الشاقولي (a_1') للنقطة . بما أن البعد بين النقطة والمستوي والمستوي الأمامي على الخطط يقاس بالبعد بين المسقط الشاقولي للنقطة والأثر الشاقولي للمستوي



لذلك نرمم من a'_1 دائرة نصف قطرها 18 mm ثم نرمم من النقطة P_{v1} الاخر
 مماساً لهذه الدائرة (معطى حل واحد) .

نرسم مستقيماً أفقياً ما في المستوي P_1 ، وبإيجاد وضعه الأولية نرسم من التعتين P_1 و v' الأثر الشاقولي المطلوب (P_v) للمستوي .

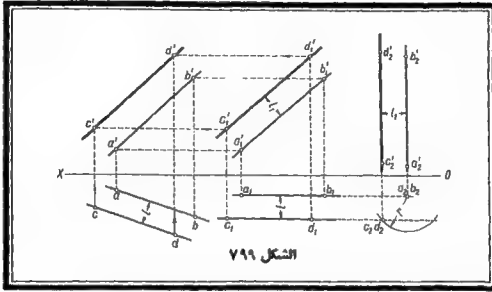
● المثال ٢٥٨ : لدينا مستوي P والمقط الشاقولي للنقطة A التي تبعد عن المستوي P بمقدار 18 mm . أوجد المقط الأفقي لهذه النقطة (الشكل ٧٩٥ ، ٧٩٦) .

الحل : ١ - طريقة الإنطباق (الشكل ٧٩٥) : نرسم من النقطة ($a \cdot a'$) مستوياً أمامياً R عمودياً على المستوي P ، ونطبقه على مستوي الإسقاط الشاقولي نوجد المستقيم $v' H_0$ الفصل المشترك للمستويين P و R . بما أن مطبق النقطة A_0 يجب أن يبعد 18 mm عن المستقيم $v' H_0$ ويقع على العمود المرفوع من النقطة a' على الأثر R_v لذلك نرسم بصورة موازية للمستقيم $v' H_0$ مستقيماً مساعداً على بعد 18 mm (معطى حل واحد) ، ويتقاطعه مع العمود نحصل على النقطة A_0 ، وبمعرفة A_0 نوجد المقط الأفقي (a) للنقطة A .

٢ - طريقة تبديل مستويات الإسقاط (الشكل ٧٩٦) : نبذل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_1) عمودي على المستوي P . بومر مستقيم مساعد مواز للأثر P_{H_1} وعلى بعد 18 mm منه نجد عند تقاطعه مع العمود المنزل من المقط الشاقولي (a') للنقطة على $o_1 x_1$ النقطة a_1 . بمساعدة النقطة a_1 نوجد المقط الأفقي المنشود (a) للنقطة .

● المثال ٢٥٩ : لدينا المستقيم AB والمقط الأفقي (cd) للمستقيم CD الموازي للمستقيم AB . أوجد المقط الشاقولي للمستقيم CD إذا كان البعد بين المستقيمين المفروضين مساوياً 1 mm (الشكل ٧٩٧ - ٧٩٩) .

الحل : ١ - طريقة تبديل مستويات الإسقاط (الشكل ٧٩٧) : بتبديل



مستويات الإسقاط باخرى جديدة نجعل مستوي الإسقاط الأفقي عمودياً على المستقيمين المفروضين . في هذه الحالة يقاس البعدين المستقيمين بالبعد بين المسطحين الأفقيين ($a_2 b_2$) و ($c_2 d_2$) المثلين بشكل نقاط . ومنه : نبذل مستوي الإسقاط الشاقولي بأخر جديد (V_1) يوازي المستقيمين المفروضين ونوجد مبدأً فقط المسقط الشاقولي ($a'_1 b'_1$) للمستقيم AB . بعد ذلك نبذل مستوي الإسقاط الأفقي بأخر جديد (H_2) عمودي على المستقيمين المفروضين ونوجد من جديد فقط المسقط الأفقي ($a_2 b_2$) لذلك المستقيم . نرسم من هذه النقطة دائرة نصف قطرها l mm كما نرسم مستقيماً موازياً لخط الأرض ($o_2 x_2$) وعلى بعد c_{a_1} فنصل بتقاطعه مع الدائرة على النقطة c_2 وهي مجد ذاتها d_2 - المسقط الأفقي ($c_2 d_2$) للمستقيم CD (معطى حل واحد) . ياييماد المسقط الشاقولي

($c'd_1$) المستقيم بإنشاء معاكس نحصل على مقطع الشاقولي ($c'd'$) في
الوضعية الأولى .

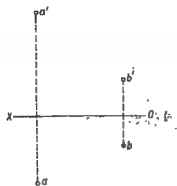
٢ - طريقة الانطباق (الشكل ٧٩٨) : نأخذ على المستقيم ($ab, a'b'$) نقطة
حا (k, k') ونرسم منها مستويًا P عمودياً على هذا المستقيم . لإيجاد أساس المستقيم
على المستوي P أي (m, m') ، نضم هذا المستقيم في مستوي شاقولي R ونوجد
المستقيم (h_v, h'_v) الفصل المشترك للمستويين . بتطبيق المستوي P على مستوي الإسقاط
الأفقي (الشاقولي) نعين النقطة k ، ومن هذه النقطة نرمس دائرة نصف قطرها
 lmm فتقطع المستقيم h_v في النقطة M أساس المستقيم ($cd, c'd'$) على المستوي P .
نوجد المقطع الشاقولي (m') لهذه النقطة ونرسم منها المقطع الشاقولي ($c'd'$)

للمستقيم . (معطى حل واحد) .

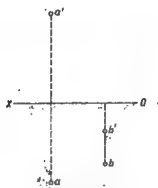
٣ - طريقة الانتقال (الشكل ٧٩٩) : ننقل الجملة المفروضة بصورة موازية
لمستوي الإسقاط الأفقي ونحولها إلى وضعية يكون فيها المستقيم AB جيباً . بعد
ذلك ننقل الجملة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي ونحولها إلى وضعية يصبح
فيها المستقيم AB شاقولياً . في هذه الحالة المسقطان الأفقيان للمستقيمين سيتحولان
إلى نقطتين (a_2, b_2) و (c_2, d_2) البعد بينهما يجب أن يساوي lmm ومنه لإيجاد
النقطة (c_2, d_2) نرمس من النقطة (a_2, b_2) دائرة نصف قطرها lmm ، وتقاطعها مع
المستقيم c_1d_1 الموازي لخط الأرض نحصل على النقطة (c_2, d_2) المقطع الأفقي للمستقيم
 CD (معطى حل واحد) . بإيجاد المقطع الشاقولي ($c'd'_2$) للمستقيم وإنشاء معاكس
نحصل على مقطعه الشاقولي ($c'd'$) في وضعيته الأولى .

مسائل

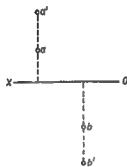
- ٤٣٨ - عين البعد بين النقطتين A و B (الشكل ٨٠٠ - ٨٠٣) .
- ٤٣٩ - أوجد المسقط الناقص للنقطة B إذا كان البعد بين النقطتين A و B مساوياً 25 mm (الشكل ٨٠٤ ، ٨٠٥) .
- ٤٤٠ - عين بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .
- ٤٤١ - أوجد المسقط الناقص للنقطة A إذا كان بعد النقطة A عن المستقيم BC مساوياً 25 mm (الشكل ٨٠٦ ، ٨٠٧) .
- ٤٤٢ - عين البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٥٩٩ ، ٦٣٩) .
- ٤٤٣ - أوجد المسقط الناقص للمستقيم CD إذا كان البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD مساوياً 25 mm (الشكل ٨٠٨ ، ٨٠٩) .
- ٤٤٤ - ارسم مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيمين AB و CD والذي يبعد عن المستقيم AB بمقدار 20 mm وعن المستقيم CD بمقدار 30mm (الشكل ٥٩٩ ، ٦٣٩) .
- ٤٤٥ - أوجد مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيم AB والذي يبعد عنه بمقدار 20 mm وعن النقطة C بمقدار 30 mm (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .
- ٤٤٦ - أوجد مسقطي المستقيم MN الذي يوازي المستقيمتين EF, CD, AB ويبعد عنها بمقدار واحد (الشكل ٨١٠) .
- ٤٤٧ - أوجد مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيم AB والذي يبعد بنفس المقدار



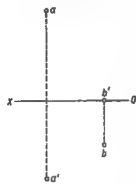
الشكل ٨.٠



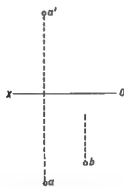
الشكل ٨.١



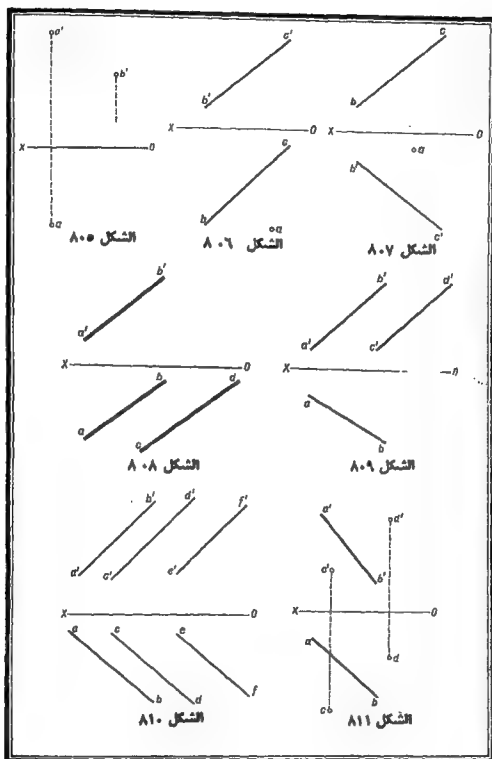
الشكل ٨.٢

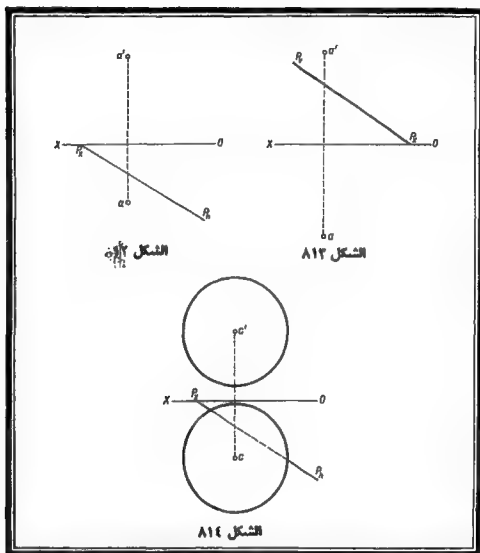


الشكل ٨.٣



الشكل ٨.٤





عن هذا المستقيم وعن النقطتين D و C (الشكل ٨١١) .

٤٤٨ - أوجد البعدين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٥٦٠ ٥٧٨٠) .

٤٤٩ - أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن المستقيم CD بمقدار 25 mm (الشكل ٥٦٠ ، ٥٧٨) .

٤٥٠ - عيّن بعد النقطة K عن المستوي الممطي (الشكل ٦٤١ - ٦٤٥) .

٤٥١ - ارسم من النقطة C كرة تقس المستوي المفروض (الشكل ٥٨٢ - ٥٨٧) .

٤٥٢ - أوجد المقطع الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي المفروض بمقدار 25 mm (الشكل ٥٥٧ ، ٥٨٨ - ٥٩٠) .

٤٥٣ - أوجد الأثر الناقص للمستوي P إذا كان بعد النقطة A عن هذا المستوي يساوي 20 mm (الشكل ٨١٢ ، ٨١٣) .

٤٥٤ - أوجد الأثر الناقص للمستوي P إذا كان مماساً لسطح الكرة (الشكل ٨١٤) .

٤٥٥ - عيّن البعد بين المستويين المتوازيين Q و P (الشكل ٥٧٧) .

٤٥٦ - ارسم المثلث المثلثي لجميع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوي المفروض بمقدار 25 mm (الشكل ٥٩٦ - ٦٠٠) .

٤٥٧ - عيّن على المستقيم MN نقطة تبعد عن المستوي المفروض 20 mm (الشكل ٦٠٦ - ٦٠٨) .

البحث الواحد والعشرون

تعيين الزوايا

تعيين الزاوية بين مستقيمين متقاطعين بإحدى الطرق التالية :

١ - بتضمين الزاوية في مثلث : نقطع ضلعي الزاوية بمستقيم ما ونعين القيمة الحقيقية للمثلث الحاصل ومنه نعين القيمة الحقيقية للزاوية المعطاة .

٢ - بالدوران (أو الانتقال) : نوضّع مستوي الزاوية بحيث يصبح موازياً لأحد مستويات الإسقاط .

٣ - بالانطباق : نعين أحد أثار مستوي الزاوية - الأثر الأفقي أو الشاقولي - بالدوران حول هذا الأثر نطبق الزاوية مع مستوي الإسقاط الموافق .

٤ - بالدوران حول مستقيم أفقي أو جيهي : نطبق الزاوية المقبوضة مع المستوي R الموازي لمستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) والمار من مستقيم أفقي (جيهي) ما من مستوي الزاوية .

٥ - بتبديل مستويات الإسقاط : نغير مستويات الإسقاط بحيث يصبح أحدها حوazياً لمستوي الزاوية المعطاة .

ملاحظة . إن أبسط طرق الحل المذكورة هي الطريقة الرابعة التي توصلنا للنهاية المنشودة بكل بساطة وسرعة .

للمستقيمات التي لا تقع في متو واحد ، كقياس الزاوية البكائنة بينهما نستخدم الزاوية بين مستقيمين متقاطعين وموازيين للمستقيمين المفروضين .

مسائل

● المثال ٢٦٠ : عين القيمة الحقيقية للزاوية ABC (الشكل ٨١٥) .

الحل : طريقة الدوران حول مستقيم أفقي .

نمرر المستقيم الأفقي $(mn, m'n')$ في مستوي الزاوية ونضمن هذا المستقيم في المستوي T الموازي للمستوي الأفقي للإسقاط . نطبق جانبي الزاوية $(mb, m'b')$ و $(nb, n'b')$ مع المستوي T . النقاط (m, m') و (n, n') تقع في المستوي T يبقى أن نطبق على هذا المستوي رأس الزاوية (b, b') . الزاوية $m B n$ هي الزاوية المطلوبة . الإنشاء واضح من الرسم .

● المثال ٢٦١ : انشئ منصف الزاوية C للمثلث ABC (الشكل ٨١٦) .

الحل : طريقة التل .

لتنصيف الزاوية علينا تعيين قيمتها الحقيقية ولهذا علينا أن نوضع مستوي المثلث بحيث يصبح موازياً لأحد مستويات الإسقاط مثلاً المستوي الأفقي .

نمرر من النقطة (a, a') مستقيماً أفقياً في مستوي المثلث وننقله بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي حتى يصبح عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي . عند نقل المثلث بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي فإن مسقطه الأفقي كما نعلم لا يتغير لذا نضع المسقط الأفقي للمثلث في الوضعية $a_1 b_1 c_1$ بحيث يكون المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي عمودياً على خط الأرض . من $a_1 b_1 c_1$ نجد المسقط الشاقولي $(a'_1 b'_1 c'_1)$ للمثلث الذي هو بشكل مستقيم . بعدئذا ننقل المثلث $(a_1 b_1 c_1, a'_1 b'_1 c'_1)$ بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي بحيث يصبح المسقط الشاقولي $(a'_2 b'_2 c'_2)$ للمثلث

موازياً لخط الأرض . من $a_2b_2c_2$ نعين $a_2b_2c_2$. ننشئ النصف للزاوية (c_2, c'_2) ونعين مسقطه $(cd, c'd')$ بإنشاء عكسي (الإنشاء واضح من الرسم) .
تسمى الزاوية الحادة المحصورة بين مستقيم ما ومسقطه على مستوي مفروض بالزاوية بين المستقيم والمستوي .

لتعين هذه الزاوية بالطريقة المباشرة نلزمنا بعض الإنشاءات الإضافية (ماضي ٢) مما يجعل هذه الطريقة طويلة . إلا أنه يمكننا أن نبسطها كثيراً بتعين الزاوية المتممة لها أي الزاوية الحادة θ المحصورة بين المستقيم والعمود المنزل من نقطة ما من ذلك المستقيم على ذلك المستوي . تعين هذه الزاوية يمكن أن يتم بإحدى الطرق المبينة أعلاه إلا أنه كما سبق ونوهنا من الأسهل والأبسط استخدام طريقة الدوران حول المستقيم الأفقي أو الجبهي .

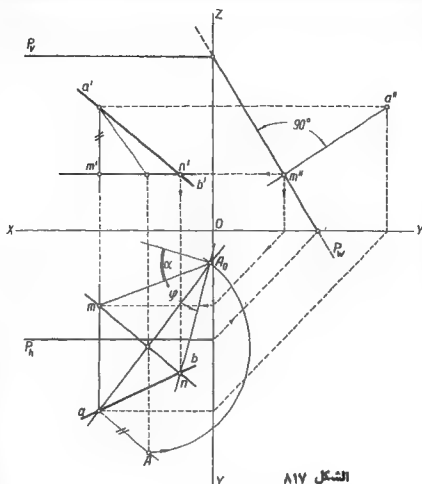
في الحالة عندما يتبين أن الزاوية منفرجة فإنه للحصول على الزاوية المطلوبة α علينا أن نطرح من الزاوية θ زاوية قدرها 90° (الشكل ٨١٧ أ) .

● المثال ٢٦٢ : عين الزاوية بين المستقيم AB والمستوي P (الشكل ٨١٧ ب) .

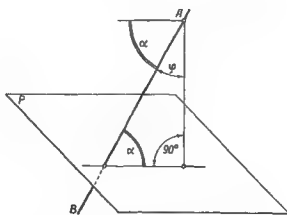
الحل : ننزل من النقطة (a, a') عموداً على المستوي P . بما أن المستوي P عمودي على المستوي الجبهي لذا ننشئ الأثر الجبهي (P_p) للمستوي والمقط الجبهي (a'') للنقطة . نمر من النقطة a'' المستقيم $a''m''$ العمودي على الأثر P_p ومنه نعين المسقط الأفقي (am) والشاقولي $(a'm')$ لهذا العمود . بعدها بالدوران حول المستقيم الأفقي $(mn, m'n')$ نعين القيمة الحقيقية للزاوية $\angle mAn$ وبالتالي قيمة الزاوية α كالزاوية المتممة لها .

ملاحظة : . بصورة مماثلة تماماً تعين الزاوية بين المستقيم والمستوي عندما لا يُعطى المستوي بآثاره .

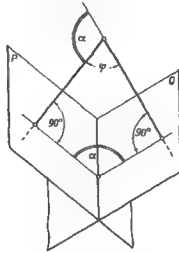
تقاس الزاوية بين مستويين متقاطعين بأصغر زاوية خطية (α°)



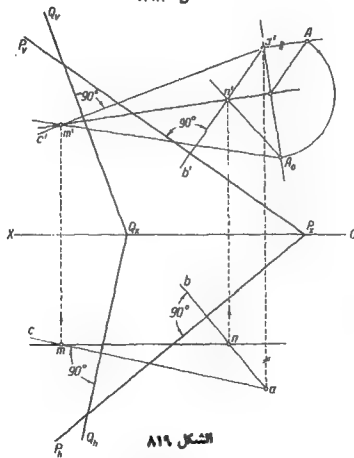
الشكل ٨١٧



الشكل ٨١٧ - أ



الشكل ٨١٨



الشكل ٨١٩

تعيين هذه الزاوية يتطلب مجموعة من الإنشاءات الإضافية (ما هي ؟) لذا فإن طريقة الحل المباشر طويلة للغاية . إلا أنه يمكننا تبسيط المسألة بتعيين الزاوية φ المحصورة بين العمودين المتزليين من نقطة إختيارية ما على المستويين المفروضين . إن هذه الزاوية φ هي الزاوية المطلوبة إذا كانت حادة أما إذا كانت φ منفرجة فإن الزاوية المطلوبة هي الزاوية المكمل لها (الشكل ٨١٨) .

في حالة تعيين الزاوية بين مستويين متقاطعين ذا جوانب موجبة (مثلين وجوه كثير الوجوه) علينا أن ننشئ أعمدة على تلك المستويات المفروضة من نقطة اختيارية مأخوذة داخل كثير الوجوه . الزاوية المطلوبة هي الزاوية المكمل للزاوية المعينة φ . يمكن أن نتعين الزاوية بين مستويين بالطرق الإضافية التالية :

١ - بالدوران أو بالانتقال : علينا أن نوضع المستويين المعطيين (أي خط تقاطعها) في وضعية عمودية على أحد مستويات الإسقاط (انظر المثال ٢١٠) .

٢ - بتبديل مستويات الإسقاط : علينا تغيير مستويات الإسقاط بحيث يصبح أحدها عمودياً على المستويين المفروضين أي على خط تقاطعها (انظر المثال ٢٤٩) .

● المثال ٢٦٣ : عين الزاوية بين المستويين Q و P (الشكل ٨١٩) .

الحل : ننشئ من نقطة اختيارية $(a'a')$ العمودين $(ab, a'b')$ و $(ac, a'c')$ على المستويين Q و P وبالدوران حول المستقيم الجانبي $(mn, m'n')$ نعين القيمة الحقيقية للزاوية $(bac, b'a'c')$. الزاوية المطلوبة تساوي الزاوية α .

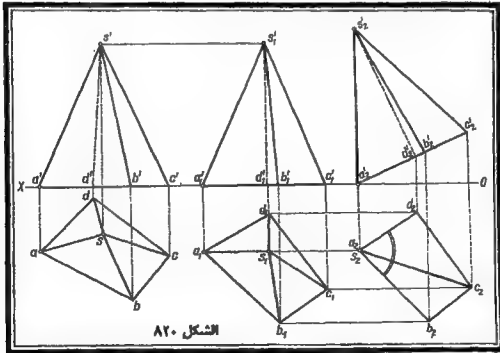
● المثال ٢٦٤ : عين الزاوية عند الحرف SA للهرم $SABCD$ (الشكل ٨٢٠) .

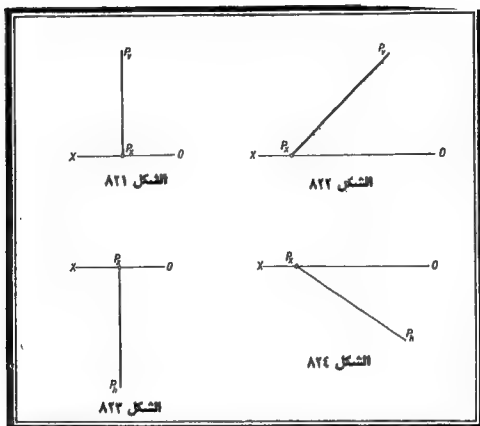
الحل : طريقة الانتقال .

نقل الهرم بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي ونوضعه بحيث يصبح الحرف SA موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي بعدها نقله بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي ونوضعه بحيث يصبح الحرف SA عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي . الزاوية $\angle d_2 B_2 d_1$ هي الزاوية المنشودة . الإنشاء واضح من الرسم .

مسائل

- ٤٥٨ - عين الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين AB و AC (الشكل ١٦٤ ، ١٦٥) .
 ٤٥٩ - عين الزاوية بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٥٦٠ ، ٥٧٨) .
 ٤٦٠ - عين الزاوية بين المستقيم AB والمستوي المقروض (الشكل ٤٥١ - ٤٥٨) .
 (٤٧٠ - ٤٧٣) .





٤٦١ - عين زوايا ميل المستوي المفروض على مستويات الإسقاط (الشكل ٥٩٦-٦٠٠).

٤٦٢ - عين الأثر الآخر للمستوي P إذا كانت الزاوية المشكلة بين هذا المستوي

ومستوي الإسقاط الشاقولي تساوي 60° (الشكل ٨٢١، ٨٢٢).

٤٦٣ - عين الأثر الآخر للمستوي P إذا كانت الزاوية المشكلة بين هذا المستوي

ومستوي الإسقاط الأفقي تساوي 45° (الشكل ٨٢٣، ٨٢٤).

٤٦٤ - ارسم من النقطة A (20 , 30) مستويًا اختياريًا P ميل على مستوي

الإسقاط الأفقي (الشاقولي) بزاوية قدرها 45° .

٤٦٥ - عين الزاوية بين وجهي الهرم عند الحرف SA (SB,SC,SD) وكذلك

زاوية ميل الوجه SAB (SBC,SCD,SAD) على القاعدة (الشكل ٨٢٠)

٤٦٦ - عين الزاوية بين المستويات المقروضة (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤ ، ٣٩٨ -

٤٠١ ، ٤٠٨ ، ٤٠٩ ، ٤٧٤ ، ٦٠١ - ٦٠٣) .

البحث الثاني والعشرون

تقاطع كثيرات الوجوه مع مستوي

انفرادات كثيرات الوجوه

انفراد كثير الوجوه هو الشكل المستوي الحاصل بالتطبيق المتتابع لجميع وجوه

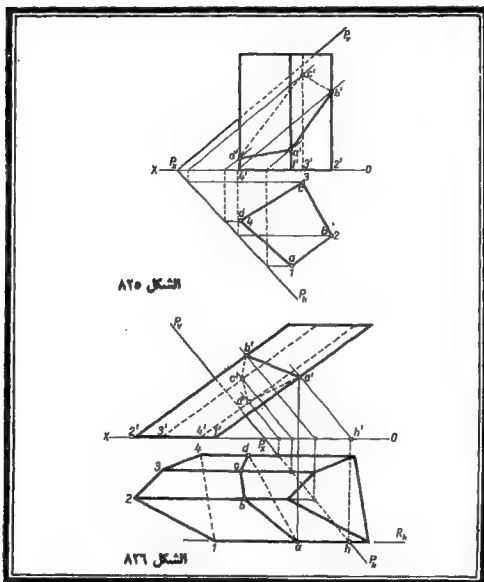
كثير الوجوه على مستوي الرمم . مساحة الشكل الناتج تساوي مساحة سطح كثير
الوجوه المفرد .

أمثلة

• المثال ٣٦٥ : أوجد خط تقاطع سطح المنشور مع المستوي P (الشكل ٨٢٥) .

الحل : لإنشاء خط التقاطع علينا إيجاد نقاط تقاطع أحرف المنشور مع المستوي

المفروض . نعين النقطة (a , a') تقاطع الحرف (1,1') مع المستوي . المقط الأفقي



(a) لهذه النقطة ينطبق على المسقط الأفقي للحرف ويعرفه نعين المسقط الشاقولي
 (a') النقطة أذ أن النقطة (a, a') تقع أيضاً في المستوي P . بصورة مماثلة نجد النقاط

(d', c', b', a') لتضع بقية الأحرف مع المستوي P . بوصل هذه النقاط على . . . ب مساقط خط التقاطع المطلوب : المسقط الأفقي (abcd) والمسقط الشاقولي (a'b'c'd') .

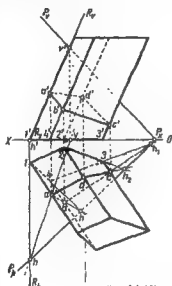
من الرسم واضح أن المسقط الأفقي (abcd) لخط التقاطع ينطبق مع المسقط الأفقي (a'b'c'd') للموشور .

● مثال ٢٦٦ : أوجد خط تقاطع سطح الموشور مع المستوي P (الشكل ٨٢٦) .

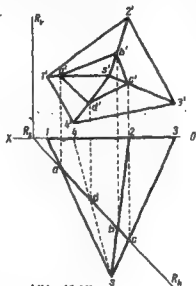
الحل : علينا أن نجد نقاط تقاطع احرف الموشور مع المستوي P . نعين النقطة (a , a') لتقاطع الحرف (1,1') مع المستوي . نضمن الحرف في المستوي R الموازي لمستوي الاسقاط الشاقولي فيقطع المستوي P وفق مستقيم جيهي . نقطة تقاطع المساقط الشاقولية للحرف والمستقيم الجيهي هي المسقط الشاقولي (a') للنقطة وبررت ثبت المسقط الأفقي (a) للنقطة على المسقط الأفقي للحرف . بصورة مماثلة ثبت ان (d , d') و (c , c') و (b , b') لتقاطع بقية الأحرف مع المستوي . بوصل النقاط الحاصلة على التابع نجد المساقط المنشودة : المسقط الأفقي (abcd) والمسقط الشاقولي (a'b'c'd') .

● المثال ٢٦٧ : أوجد خط تقاطع سطح الموشور مع المستوي P (الشكل ٨٢٧) .

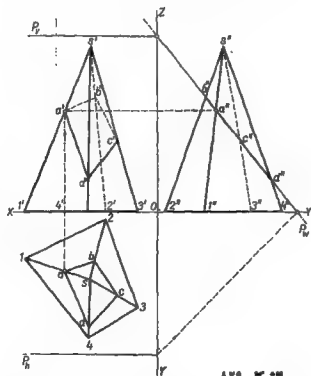
الحل : بما أن أحرف الموشور والمستوي ذات وضعية عامة فإن إيجاد نقاط تقاطع جميع الحروف الجانبية مع المستوي بالطريقة العادية معقد وطويل (لماذا ؟) لذا لتبسيط الإنشاء علينا أن نأخذ بعين الاعتبار مايلي : الموشور يستند بقاعدته على المستوي الأفقي للاسقاط والمسقط الأفقي لكل ضلع من قاعدة الموشور هو



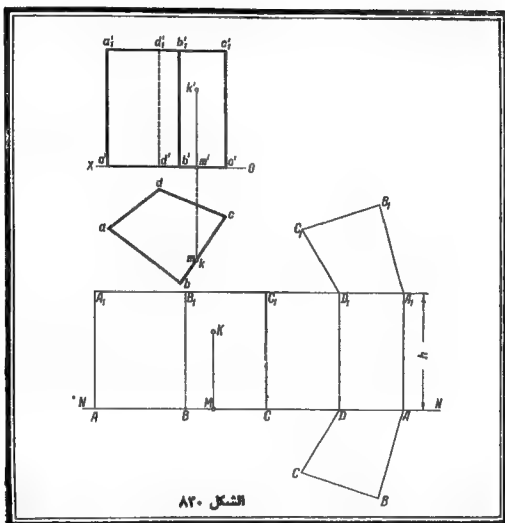
الشكل ٨٢٧



الشكل ٨٢٨



الشكل ٨٢٩



الشكل ٨٢٠

الأثر الأفقي للوجه الجانبي الموازي للوشور أما نقطة تقاطع كل من هذه الأضلاع مع الأثر الأفقي (P_h) فهي نقطة من المسقط الأفقي لحط التقاطع . من هذا بطريقة اعتيادية نجد مثلاً النقطة (a, a') لتقاطع الحرف ($1, 1'$) مع المستوي

ثم نجد المستقيم $1,4$ حتى يتقاطع مع الأثر P_h في النقطة h . يوصل النقطة a بـ h بالمستقيم ah فإن تقاطعه مع المسقط الأفقي للحرف (h, h') يعين المسقط الأفقي (b) لنقطة تقاطع الحرف (h, h') مع المستوي ومنه نجد المسقط الشاقولي (b') للنقطة . بطريقة مماثلة نجد المستقيم $4,3$ حتى تقاطعه مع الأثر P_h في النقطة h_1 ، يوصل النقطتين b, h_1 بالمستقيم bh_1 فإن نقطة تقاطعه مع المسقط الأفقي للحرف (s, s') تعين لنا المسقط الأفقي (c) لنقطة تقاطع الحرف (s, s') مع المستوي ومنه نجد المسقط الشاقولي (c') لهذه النقطة . أخيراً نجد المستقيم $2,3$ حتى تقاطعه مع الأثر P_h في النقطة h_2 . يوصل النقطتين c, h_2 بالمستقيم ch_2 فإن نقطة تقاطعه مع المسقط الأفقي للحرف $(2, 2')$ تعين لنا المسقط الأفقي (d) لنقطة تقاطع الحرف $(2, 2')$ مع المستوي . ومن هذا المسقط نعين المسقط الشاقولي (d') لهذه النقطة . يوصل النقاط الخاصة على التابع نجد مساقط خط التقاطع المنشود : المسقط الأفقي $(abcd)$ والمسقط الشاقولي $(a'b'c'd')$.

● المثال ٢٦٨ : أوجد خط تقاطع سطح الهرم مع المستوي R (الشكل ٨٢٨) .

الحل : نعين نقاط تقاطع الأحرف الجانبية للهرم مع المستوي الشاقولي R . يوصل هذه النقاط على التابع نجد مساقط الخط المنشود : المسقط الأفقي $(abcd)$ والمسقط الشاقولي $(a'b'c'd')$. من الرسم واضح أن المسقط الأفقي $(abcd)$ لخط التقاطع ينطبق مع الأثر R_h (لماذا؟) .

● المثال ٢٦٩ : أوجد خط تقاطع سطح الهرم مع المستوي P (الشكل ٨٢٩) .

الحل : نعين نقاط تقاطع الأحرف الجانبية للهرم مع المستوي الموازي لخط الأرض . ننشئ المسقط الجانبي للهرم والأثر الجانبي (P_h) للمستوي . نقاط تقاطع المساقط

الجانبية: لأحرف المرمع مع الأثر P تعين لنا المساط الجانبية لنقاط تقاطع الأحرف مع المستوي . من هذه المساط نجد المساط الأفقية والشافولية لهذه التقاط . بوصول هذه النقاط على التتابع نجد مساط خط التقاطع المنشود : المسقط الأفقي (abcb) والمسقط الشافولي (a'b'c'd') . إن حل هذه المسألة دون اللجوء للمستوي الجنبى يسب تعقيد الإنشاء (للمذاق) .

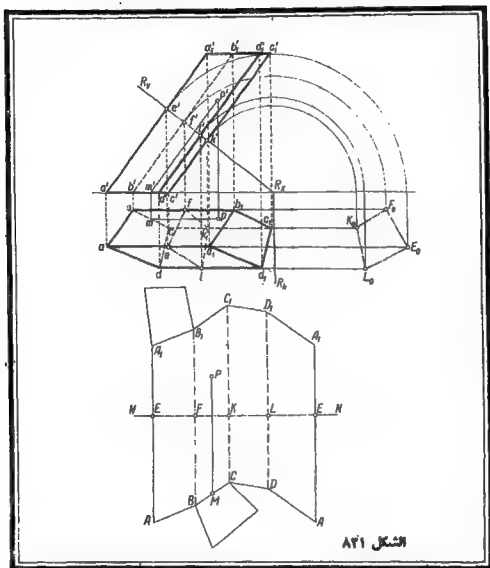
● المثال ٢٧٠ : أرسم انفراد سطح المشور الرباعي (الشكل ٨٣٠) .

الحل : إن السطح الكلى للمشور المفروض يتألف من أربعة مستطلات ومضلعين . نرمس مستقيماً اختيارياً NN وعليه اعتباراً من النقطة A نأخذ الأطوال $AB = ab, BC = bc \dots$ المساوية لأضلاع قاعدة المشور أي AC, BC, CD, DA من النقاط A, B, C, D, A ننشئ أعمدة على المستقيم NN وعليها نأخذ قطعاً مساوية بطول h . بوصول نهايات الأعمدة نحصل على المستقيم $A_1B_1C_1D_1A_1$ الموازي للمستقيم ABCDA . بعدها ننشئ على الجانب AD قاعدة المشور السفلية أما على الجانب A_1D_1 فننشئ قاعدته العلوية . إن الشكل الحاصل هو الانفراد الكلى لسطح المشور .

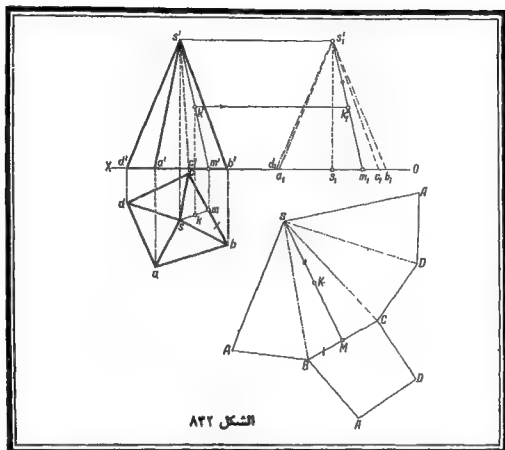
نبين كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما (k, k') معطاة على وجه المشور BB_1CC_1 وإيجادها على الانفراد . نأخذ على الضلع BC الطول BM المساوي لـ bm . من النقطة m ننشئ عموداً نأخذ عليه القطعة MK المساوية لـ $m'k'$.

● المثال ٢٧١ : أرسم انفراد سطح مشور رباعي مائل (الشكل ٨٣١) .

الحل : بما أن الوجوه الجانبية للمشور المائل هي متوازية الأضلاع فإنه لإنشائها بالقيمة الحقيقية علينا تعيين الزاوية بين أضلاع كل من هذه المتوازيات الأضلاع وكذلك طول أحد أقطاره . إلا أنه يمكننا الاستغناء عن هذا باستخدام المستوي المساعد R



العمودي على الأحرف الجانبية الذي يقطع الموسود المائل إلى موسورين قائمين مقطوعين ذا قاعدة مشتركة في مستوي المقطع العمودي . بتعين مسقط هذا المقطع (المسمى بالناظمي) وبتعين قيمه الحقيقية بطريقة الانطباق يمكننا البدء بفرد سطح



الشكل ٨٣٢

الموشور المائل الذي يتألف من سطوح موشورين قائمين متوضعين في الجبهتين المختلفتين من المقطع العمودي .

نرسم مستقيماً اختيارياً NN وعليه من النقطة E نأخذ القطع EF, FK, KL, LE المساوية لأضلاع المقطع الناطمي للموشور المائل أي $EF = E_0F_0$, $FK = F_0K_0$ من النقاط E, F, K, L, E ننشئ أعمدة على المستقيم NN وعليها نأخذ أطوال الأحرف

الجانبية للموشورين العلوي والسفلي . بوصل نهايات. الأعمدة فحصل على الخطوط المنكسرة
 $AB \parallel A_1B_1, BC \parallel B_1C_1, \dots$ ذات الأضلاع المتوازية أي $A_1B_1C_1D_1$ و $ABCD$
 بعدها ننشئ على ضلع ما القاعدتين العلوية والسفلية للموشور بقيمهما
 الحقيقية .

نبن أيضاً كيف يمكن نقل نقطة ما (p, p') معطاة على الوجه CB_1CC_1 للموشور
 المائل وإيجادها على الإنفراد . نأخذ على الضلع BC القطعة $BM = bm$. من النقطة
 M ننشئ مستقيماً موازياً للحرف ونأخذ عليه القطعة $MP = m'p'$.

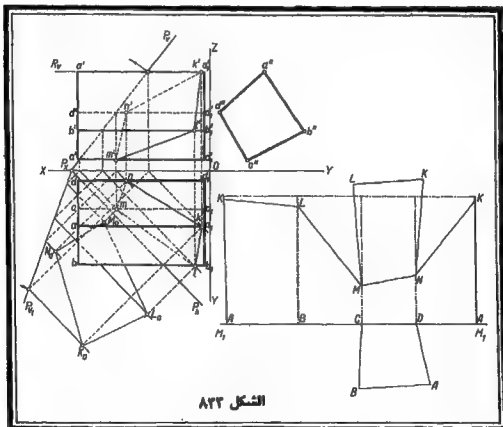
ملاحظة : إذا كانت الأحرف الجانبية للموشور المائل لاتوازي مستوي الإسقاط فإننا
 باستخدام الانتقال نضعها بحيث تصبح موازية لأحد مستويات الإسقاط .

● المثال ٢٧٢ : ارسم انفراد الهرم الرباعي (الشكل ٨٣٢) .

الحل : حتى نتمكن من رسم وجوه الهرم بقيمها الحقيقية علينا تعيين القيم الحقيقية
 لأحرفه الجانبية . نأخذ على خط الأرض من نقطة ما s_1 القطع $s_1a_1, s_1b_1, s_1c_1, s_1d_1$
 المساوية لأطوال المساقط الأفقية للأحرف الجانبية . بوصل النقاط s_1, b_1, c_1, d_1 بالنقطة
 s'_1 نجد الأطوال الحقيقية لهذه الأحرف . نأخذ نقطة ما S وننشئ على التوالي الأوجه :
 SAB, SBC, SCD, SAD بمعرفة الأضلاع الثلاثة لكل وجه بعدها نرمس قاعدة الهرم
 على أحد الأضلاع مثلاً BC . إن الشكل الحاصل هو الانفراد الكلي لسطح الهرم .
 نبن كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما (k, k') معطاة على الوجه $(sbc, s'b'c')$
 من الهرم وإيجاد هذه النقطة على الانفراد . نأخذ على الضلع BC القطعة
 $BM = bm$ ثم نصل النقطة S بالنقطة M بالمستقيم SM حيث نأخذ عليه
 القطعة $SK = s'_1k'_1$.

● المثال ٢٧٢ : اقطع الموشور بالمستوي P وارسم انفراده أحد جزئيه (الشكل ٨٢٣) .

الحل : نعين نقاط تقاطع أحرف الموشور مع المستوي P . مثلاً نعين النقطة k, k' لتقاطع الحرف $(aa_1, a'a'_1)$ مع المستوي نمر من هذا الحرف مستويًا R موازيًا لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستوي P وفق مستقيم أفقي . مكان تقاطع المسقط الأفقي للحرف والمستقيم الأفقي نجد المسقط الأفقي (k) للنقطة وبمعرفته نعين المسقط الشاقولي (k') لهذه النقطة على المسقط الشاقولي للحرف . بصورة مماثلة



نعين التقاط (n, n') , (m, m') , (l, l') لتقاطع بقية الأحرف مع المستوي . يوصل هذه التقاط على التسلسل نحمل على مساقط خط التقاط .

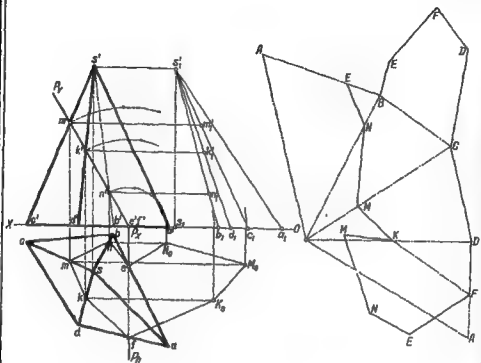
كذلك نجد بتطبيق المستوي P مع مستوي الإسقاط الأفقي القيمة الحقيقية K, L, M, N للمقطع .

قبل البدء بإنشاء انفراد الموشور المقطوع نعين القيمة الحقيقية للقاعدة ABCD المتوازية للمستوي الجانبي للإسقاط . لهذا نوجد مسقطها الجانبي ($a''b''c''d''$) .
ننشئ مستقيماً اختيارياً M_1M_2 وعليه من النقطة A نأخذ القطع AB, BC, CD, DA المساوية لأضلاع قاعدة الموشور أي ... $AB = a''b'', BC = b''c''$. من التقاط A, B, C, D, A ننشئ أعمدة على المستقيم M_1M_2 وعليها نأخذ الأطوال المتناسبة للأحرف الجانبية أي ... $AK = a'k', BL = b'l'...$. يوصل نهايات الأعمدة نجد الخط المنكسر KLMNK .
على الضلع MN نرمز القاعدة KLMN وعلى الضلع CD القاعدة ABCD .

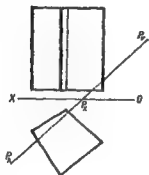
● المثال ٢٧٤ : اقطع الهرم بالمستوي P وارسم انفراد أحد جزئي (الشكل ٨٣٤) .

الحل : نعين نقاط تقاطع أحرف الهرم مع المستوي P . بما أن المستوي القاطع أمامي فإن تقاطع المساقط الشاقولية ($s'b', s'c', s'd'$) للأحرف مع الأثر الشاقولي (P_s) للمستوي يعين المساقط الشاقولية (k', m', n') لنقاط التقاط ويجبرها نعين المساقط الأفقية (k, m, n) لهذه النقاط . الحرف ($sa, s'a'$) لا يتقاطع مع المستوي القاطع . قاعدة الهرم تتقاطع مع المستوي القاطع وفق المستقيم ($ef, e'f'$) . نعين القيم الحقيقية لجميع الأحرف الجانبية للهرم بالانتقال ولشكل المقطع بالانطباق .

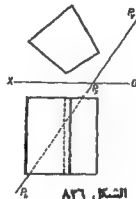
لكي نحصل على انفراد السطح الجانبي للهرم المقطوع ننشئ انفراد السطح



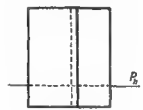
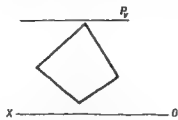
الشكل ٨٢٤



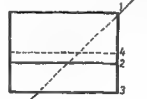
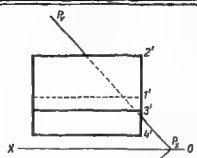
الشكل ٨٢٥



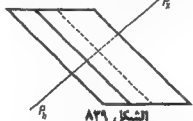
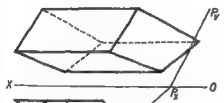
الشكل ٨٢٦



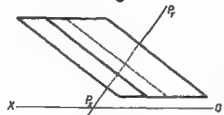
الشكل ٨٣٧



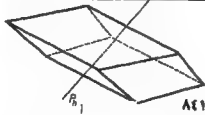
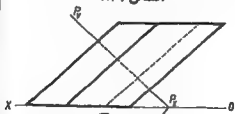
الشكل ٨٣٨



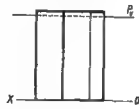
الشكل ٨٣٩



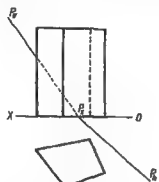
الشكل ٨٤٠



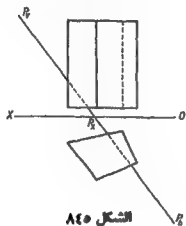
الشكل ٨٤١



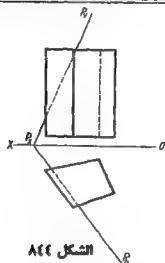
الشكل ٨٤٢



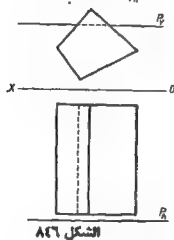
الشكل ٨٤٣



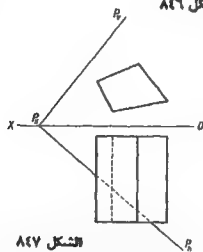
الشكل ٨٤٥



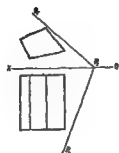
الشكل ٨٤٤



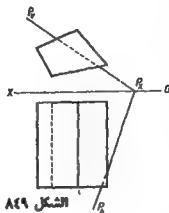
الشكل ٨٤٦



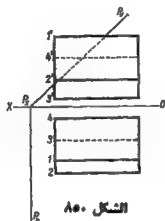
الشكل ٨٤٧



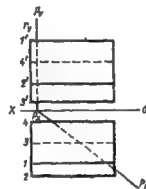
الشكل ٨٤٨



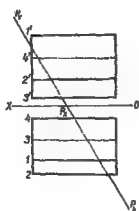
الشكل ٨٤٩



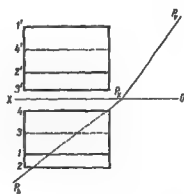
الشكل ٨٥٠



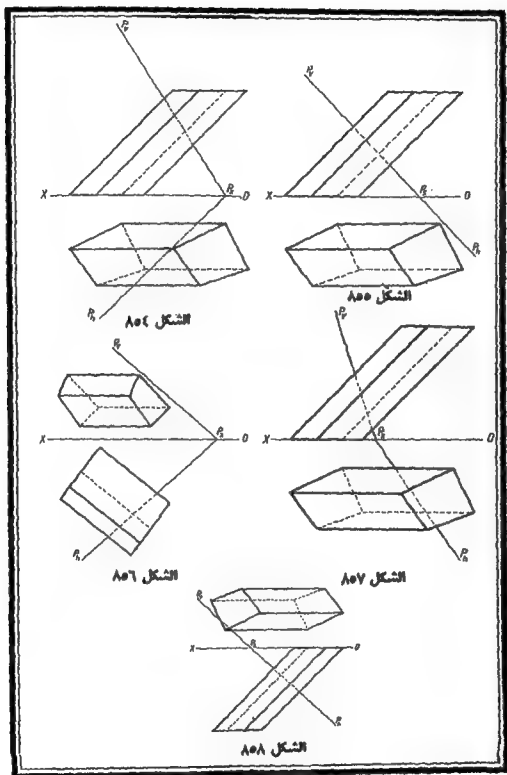
الشكل ٨٥١

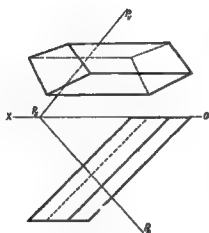


الشكل ٨٥٢

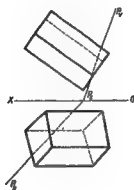


الشكل ٨٥٣

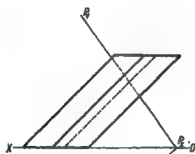




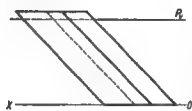
الشكل ٨٥٩



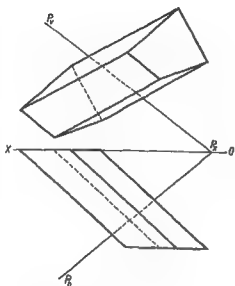
الشكل ٨٦٠



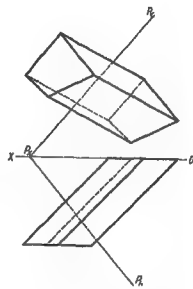
الشكل ٨٦١



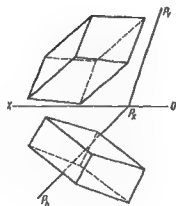
الشكل ٨٦٢



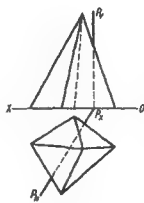
الشكل ٨٦٣



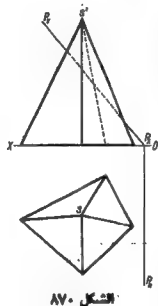
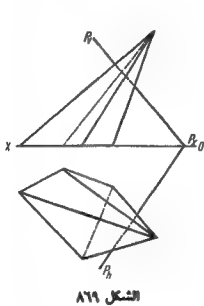
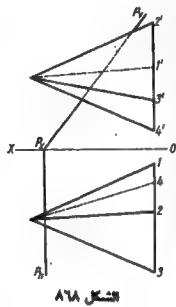
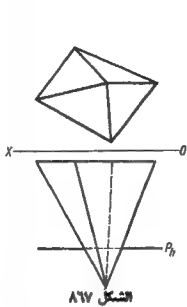
الشكل ٨٦٤

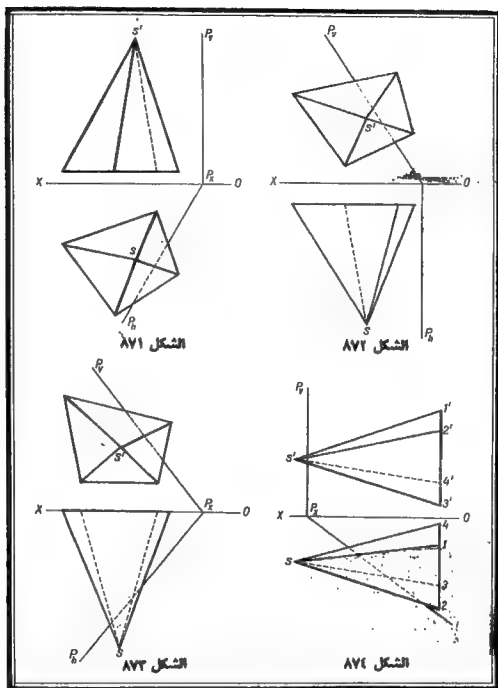


الشكل ٨٦٥

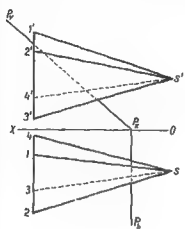


الشكل ٨٦٦

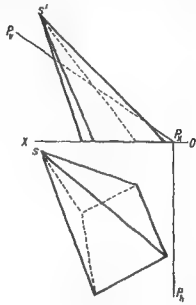




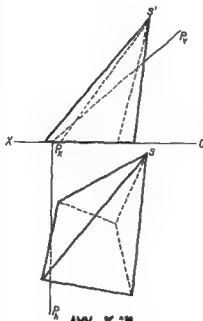
الجانبين للهرم المعطى ثم نعين عليه النقاط التي أوجدناها E, F, K, M, N .
نعين القيم الحقيقية للقطع $(sk, s'k')$, $(sm, s'm')$, $(sn, s'n')$ وناخذها
على المستقيمات SA, SC, SD . بعدا نأخذ $BE = be$ على الضلع



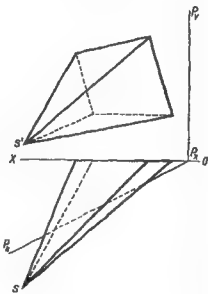
الشكل ٨٧



الشكل ٨٦

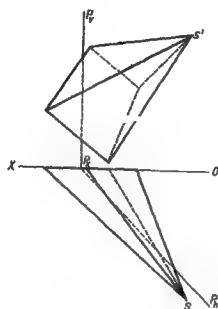


الشكل ٨٧

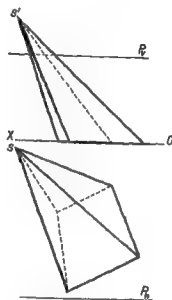


الشكل ٨٨

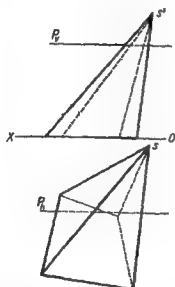
٧٢



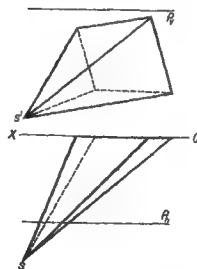
الشكل ٨٧٩



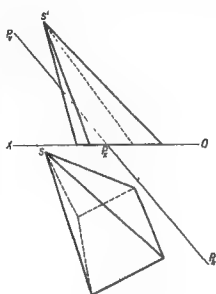
الشكل ٨٨٠



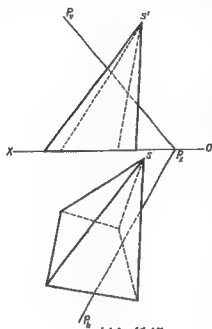
الشكل ٨٨١



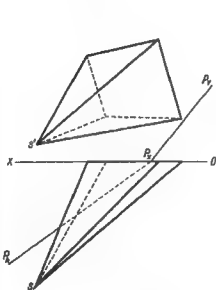
الشكل ٨٨٢



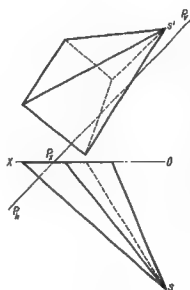
الشكل ٨٨٢



الشكل ٨٨٤



الشكل ٨٨٥



الشكل ٨٨٦

AB و $DF = df$ على الضلع DA . نرمم القاعدة العلوية والسفلية للهرم المقطوع على حرف ما .
الشكل الناتج هو الانفراد الكلي لسطح الهرم المقطوع .

ملاحظة : إذا كان المستوي القاطع ذو وضعية عامة فإنه ينصح لتحين مساقط المقطوع استخدام الدوران (الانتقال) أو تغيير مستويات الإسقاط (انظر الأمثلة ٢٠٨ ، ٢٤٨) .

مسائل

٤٦٧ - اقطع كثير الوجوه (موشور أو هرم) بالمستوي P وارسم الانفراد الكلي لأحد جزئيه (الشكل ٨٣٥ - ٨٨٦) .

البحث الثالث والعشرون

الوضعية المشتركة لمستوي و سطح

لإنشاء خط تقاطع سطح ما مع مستوي علينا أن نجد مجموعة نقاط تنتمي بأن واحد للسطح وللمستوي بعدها نصل هذه النقاط بخط مستمر .

للحصول على نقطة ما من خط التقاطع نلجأ لما يلي :

١ - نمر مستويًا مساعدًا .

٢ - نعين خط تقاطع هذا المستوي مع السطح ومع المستوي المفروض .

٣ - أمكنة تقاطع هذين الخطين تعين لنا النقاط المنشودة (غالباً نقطتين) .

وهكذا على التوالي بأخذ مجموعة مستويات مساعدة يمكننا تعيين العدد اللازم من النقاط .

ملاحظة : يختار المستوي المساعد بحيث تكون مقاطع خط تقاطعه مع السطح على مستويات الإسقاط بشكل خطوط بسيطة - مستقيم أو دائرة .

إذا كان السطح المفروض ذو مولدات مستقيمة فإن خط التقاطع يتعين كذلك يرمم مجموعة مولدات على ذلك السطح ثم يوصل نقاط تقاطع هذه المولدات مع المستوي بخط مستمر .

مقطع اسطوانة

إن أي مستوي يقطع سطح اسطوانة دائرية قائمة :

١ - وفق دائرة إذا كان المستوي عمودياً على محور الاسطوانة .

٢ - وفق قطع ناقص إذا كان المستوي مائلاً على محور الاسطوانة .

٣- وفق مولدين إذا كان المستوي موازياً لمحور الاسطوانة ويبعد عنه بمسافة l أصغر من نصف قطر الاسطوانة .

٤- وفق مولد واحد إذا كان المستوي موازياً لمحور الاسطوانة ويبعد عنه بالمسافة l المساوية لنصف قطر r الاسطوانة (المستوي مماس لسطح الاسطوانة) .

مقطع مخروط

نرمز لزاوية ميل مولد المخروط على القاعدة بـ α ولزاوية ميل المستوي على قاعدة المخروط بـ φ .

إن أي مستوي مار من ذروة مخروط دائري قائم يقطع سطحه :

١- في نقطة إذا كانت φ أصغر من α .

٢- وفق مولد واحد إذا كانت $\varphi = \alpha$ أي عندما يكون المستوي مماساً لسطح المخروط .

٣- وفق مولدين إذا كانت φ أكبر من α أو $\varphi = 90^\circ$ أي عندما يمر المستوي من محور المخروط .

إن أي مستوي لا يمر من رأس المخروط الدائري القائم يقطع سطحه :

١- وفق دائرة إذا كان المستوي مودياً على محور المخروط أي $\varphi = 0$.

٢- وفق قطع ناقص إذا كانت φ أصغر من α .

٣- وفق قطع مكافئ إذا كانت $\varphi = \alpha$ أي إذا كان المستوي يوازي أحد مولدات المخروط .

٤- وفق قطع زائد إذا كانت φ أكبر من α أو $\varphi = 90^\circ$ أي عندما يكون المستوي موازياً لمحور المخروط .

ملاحظة : لإظهار شكل خط التقاطع عندما يكون المستوي القاطع عاماً يدور المستوي حول محور المخروط حتى يصبح أمامياً إذا كان محور المخروط عمودياً على مستوي الاسقاط الأفقي أو شاقولياً إذا كان محور المخروط عمودياً على مستوي الاسقاط الشاقولي .

مقطع كرة

إن أي مستوي يقطع سطح الكرة وفق دائرة إذا كانت المسافة l بين المستوي ومركز الكرة أصغر من نصف قطر هذه الكرة R .

في الحالة الخاصة يكون المستوي مماساً لسطح الكرة إذا كانت $l = R$.

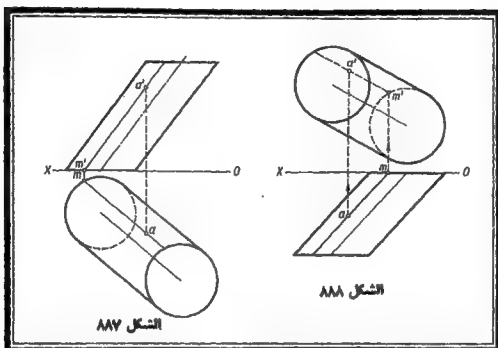
ملاحظة : إن أي سطح دوراني يُقطع وفق دائرة إذا كان المستوي القاطع عمودياً على محوره .

في المستقبل لحل المسائل كثيراً ما يلزمنا أخذ نقطة على سطح لهذا نقوم برسم خط مساعد على هذا السطح (مستقيم ، دائرة) ثم نأخذ نقطة على هذا الخط (انظر الأمثلة) .

أمثلة

● المثال ٢٧٥ : عيّن على سطح اسطوانة مائلة نقطة ما A (الشكل ٨٨٧) .

الحل : نأخذ نقطة ما (m, m') على قاعدة الاسطوانة ونمرر منها مولداً ماعداً . على هذا المولد نأخذ النقطة (a, a') التي تقع على السطح المفروض .



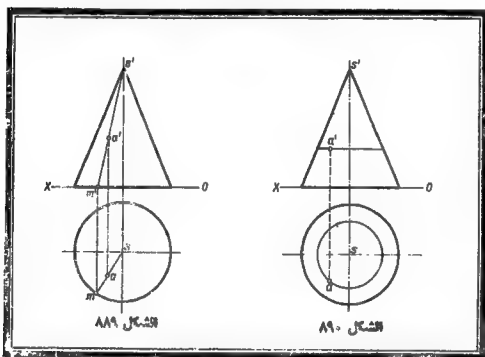
• المثال ٢٧٦ : عَيِّن المِسط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح الاسطوانة المائلة إذا علمت مسطحها الأفقي (الشكل ٨٨٨) .

الحل : نرسم من النقطة a المِسط الأفقي (a m) لمولد مساعد . نعيّن المِسط الشاقولي (m') لنقطة M ونرسم منه المِسط الشاقولي للمولد ، ثم نعيّن عليه بدلالة النقطة a النقطة a' .

• المثال ٢٧٧ : عَيِّن على سطح المخروط نقطة اختيارية ما A .

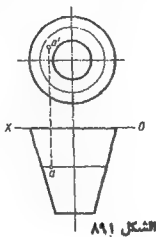
الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٨٩) . نأخذ نقطة ما (m , m') على قاعدة المخروط ونرسم منها مولداً مساعداً . على هذا المولد نأخذ النقطة (a , a') التي تقع على السطح المفروض .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٠) . نرمم على سطح مخروط دائرة مساعدة
 مسقطها الشاقولي بشكل خط مستقيم مواز لخط الأرض أما مسقطها الأفقي فبشكل
 دائرة . على هذه الدائرة نأخذ النقطة (a, a') التي تقع على السطح المفروض .

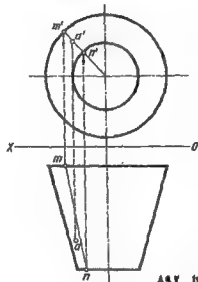


المثال ٢٧٨ : هل تقع النقطة A على سطح جذع المخروط ؟

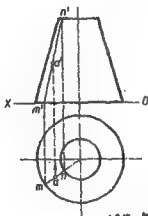
الاجابة : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩١) . نمرر من النقطة a المخطط الأفقي
 لدائرة مساعدة تقع على سطح المخروط ثم نخرج مسقطها الشاقولي . من الرسم يتضح
 أن النقطة a' لا تقع على المسقط الشاقولي لدائرة المساعدة إذن النقطة (a, a')



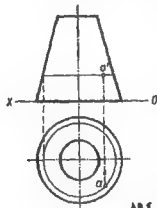
الشكل ٨٩١



الشكل ٨٩٢



الشكل ٨٩٣



الشكل ٨٩٤

لاتقع على سطح المخروط (حل المسألة يمكن أن يبدأ يوم المخطط الشاقولي
للدائرة المساعدة).

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٢) . نمر من النقطة a' المسقط الشاقولي $(m'n')$ مولد مساعد ونعين مسقطه الأفقي (mn) . من الرسم يتضح أن المسقط الأفقي (a) للنقطة لا يقع على المسقط الأفقي (mn) للمولد وبالتالي النقطة (a,a') لا تقع على سطح المخروط . (هل يمكن البدء بمحل المسألة برسم المسقط الأفقي للمولد دون تعيين المسقط الأفقي لنقطة المخروط ؟) .

● المثال ٢٧٩ : عيّن المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح جناح المخروط إذا عرف مسقطها الأفقي .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩٣) . نرمم من النقطة a المسقط الأفقي (mn) مولد مساعد ونعين مسقطه الشاقولي $(m'n')$ ثم نعين عليه بدلالة a النقطة a' .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٤) . نرمم من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح المخروط ثم نعين مسقطها الشاقولي وبالتالي نجد بدلالة a النقطة a' .

(هل يمكننا بالطريقة الأولى حل المسألة العكسية : أي من المسقط الشاقولي للنقطة أن نعين المسقط الأفقي دون اللجوء لرسم المسقط الشاقولي لنقطة المخروط ؟) .

● المثال ٢٨٠ : أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح مخروط مائل إذا عرف مسقطها الأفقي (الشكل ٨٩٥)

الحل : نمر من النقطة a المسقط الأفقي (sm) مولد مساعد . نصيّن المسقط الشاقولي (m') للنقطة M ونرمم منها المسقط الشاقولي $(s'm')$ للمولد ثم نعين عليه بدلالة النقطة a النقطة المطلوبة a'

● المثال ٢٨١ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح مخروط إذا عرف مسقطها الشاقولي .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩٦) . نرسم المسقط الجنبى للمخروط . يمر من النقطة 'a' المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على سطح المخروط ثم نعين مسقطها الجنبى . بدلالة النقطة 'a' نجد النقطة 'a' ومن هذين المسقطين نجد النقطة a .

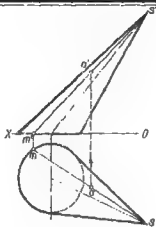
الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٧) . نرسم المسقط الجنبى للمخروط . نمرر من النقطة 'a' المسقط الشاقولي (s'm') لولد مساعد . نعين المسقط الجنبى m' للنقطة M ثم بدلالة النقطتين m' و m نعين النقطة m . نرسم المسقط الأفقي (sm) للولد وعليه نعين النقطة a .

● المثال ٢٨٢ : اختر على سطح الكرة نقطة ما A .

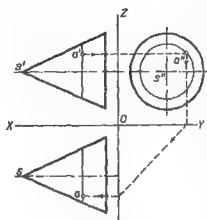
الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩٨) . نرسم على سطح الكرة دائرة مساعدة تتوضع موازية لمستوي الإسقاط الأفقي . إن مسقطها الشاقولي بشكل خط مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الأفقي فيشكل دائرة . على هذه الدائرة المساعدة نأخذ نقطة اختيارية (a , a') التي ستقع على السطح المقروض .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٩) . نرسم على سطح الكرة دائرة مساعدة تتوضع موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . مسقطها الأفقي بشكل خط مستقيم يوازي خط الأرض . أما مسقطها الشاقولي فيشكل دائرة . على هذه الدائرة المساعدة نأخذ نقطة اختيارية (a , a') التي ستقع على السطح المقروض .

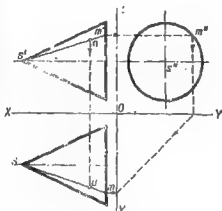
● المثال ٢٨٣ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح كرة إذا عرف مسقطها الشاقولي .



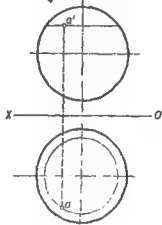
الشكل ٨٩٥



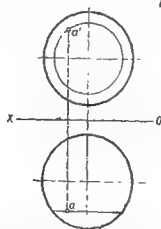
الشكل ٨٩٦



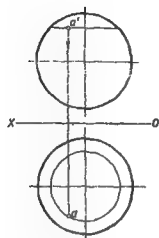
الشكل ٨٩٧



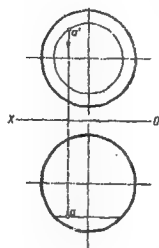
الشكل ٨٩٨



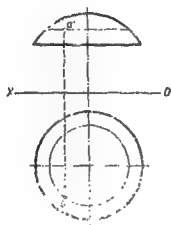
الشكل ٨٩٩



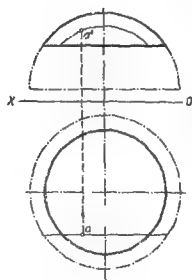
الشكل ٩.٠



الشكل ٩.١



الشكل ٩.٢



الشكل ٩.٣

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩٠٠) . نرسم من النقطة a' المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تتوضع على سطح الكرة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي . نعين المسقط الأفقي لهذه الدائرة وبالتالي بدلالة النقطة a' نجد النقطة a .

الطريقة الثانية (الشكل ٩٠١) . نرسم من النقطة a' المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على سطح الكرة وموازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . نعين المسقط الأفقي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a' نعين النقطة a .

● **المثال ٢٨٤ :** أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح قطاع كروي إذا عرف مسقطها الأفقي .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩٠٢) . نرسم من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح القطاع الكروي وموازية لمستوي الإسقاط الأفقي . نعين المسقط الشاقولي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a نعين النقطة a' .

الطريقة الثانية (الشكل ٩٠٣) . نكمل القطاع الكروي حتى نصف كرة ثم نرسم من النقطة a المسقط الأفقي لنصف دائرة مساعدة تقع على سطح نصف الكرة وتوازي مستوي الإسقاط الشاقولي . نعين المسقط الشاقولي لنصف الدائرة ثم بدلالة النقطة a نعين النقطة a' .

● **المثال ٢٨٥ :** اختر على سطح نصف الحلقة نقطة ما A (الشكل ٩٠٤) .

الحل : نرسم على سطح نصف الحلقة نصف دائرة مساعدة تقع موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . مسقطها الأفقي بشكل خط مستقيم مواز لخط الأرض أما مسقطها الشاقولي فبشكل نصف دائرة : نأخذ على نصف الدائرة المساعدة النقطة (a, a') التي ستقع على السطح المفروض .

● المثال ٢٨٦ : أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح نصف حلقة إذا عرف مسقطها الأفقي (الشكل ٩٠٥) .

الحل : نمر من النقطة a المسقط الأفقي لنصف دائرة مساعدة تتوضع على سطح نصف الحلقة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . نعين المسقط الشاقولي لنصف الدائرة هذه ثم بدلالة النقطة a نجد النقطة a' .

● المثال ٢٨٧ : أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح حلقة إذا عرف مسقطها الأفقي (الشكل ٩٠٦) .

الحل : نمر من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح الحلقة ونوازي مستوي الإسقاط الأفقي . نعين المسقط الشاقولي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a نجد النقطة a' .

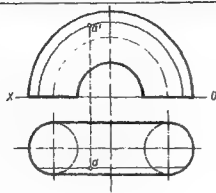
● المثال ٢٨٨ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح دوراني إذا عرف مسقطها الشاقولي (الشكل ٩٠٧) .

الحل : نمر من النقطة a' المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على السطح الدوراني . نعين المسقط الأفقي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a' نجد النقطة a .

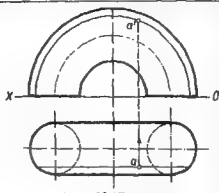
● المثال ٢٨٩ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح دوراني إذا عرف مسقطها الشاقولي (الشكل ٩٠٨) .

الحل : نمر من النقطة a' المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على السطح الدوراني ثم نعين مسقطها الأفقي وبالتالي بدلالة النقطة a' نجد النقطة a .

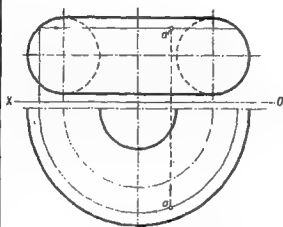
● المثال ٢٩٠ : أنشئ من نقطة a' مسطوحاً يقطع سطح اسطوانة مائلة ومى المولدات ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٠٩) .



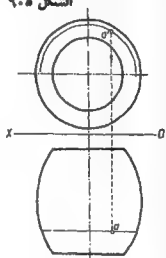
الشكل ٩٠٤



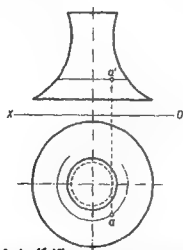
الشكل ٩٠٥



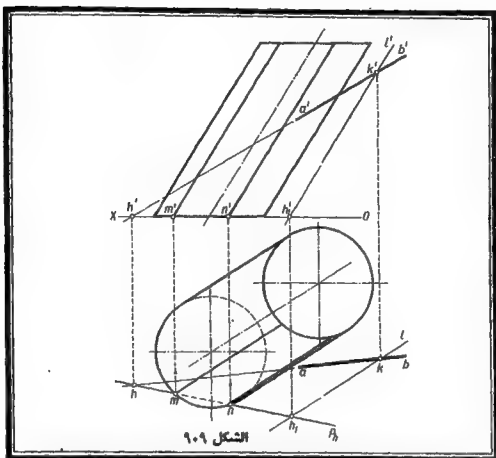
الشكل ٩٠٦



الشكل ٩٠٧



الشكل ٩٠٨



الحل : نأخذ على المستقيم $(ah, a'h')$ نقطة ما (k, k') ونرسم منها المستقيم الموازي لمحور الاسطوانة . المستقيمان (k, k') و $(ah, a'h')$ يعينان المستوي المطلوب . نعين الآثار الأفقية (h, h') و (h_1, h'_1) لهذه المستقيمان وبوصل النقطتين h, h_1 نجد الأثر الأفقي (P_h) للمستوي الذي يتقاطع مع قاعدة الاسطوانة في

النقطتين (n, n') و (m, m') . من هذه النقاط نرم المولدات المطلوبة .

ملاحظة : في الحالة الخاصة (متى ؟) يمكن أن يمس الأثر الأفقي (P_h) قاعدة الاسطوانة عندها يكون المستوي مماساً لسطح الأسطوانة .

● المثال ٢٩١ : مرر من النقطة A مستويًا مماساً لسطح اسطوانة مائلة (الشكل ٩١٠) .

الحل : نمر من النقطة (a, a') مستقيماً موازياً لمحور الاسطوانة ونعين أثره الشاقولي (v, v') . نمر من النقطة v' المستقيمين $v'k'_1$ و $v'k'_2$ المماسين للسقط الشاقولي لقاعدة الاسطوانة في النقطتين m' و m . من النقطتين (m, m') و (m_1, m'_1) ننشئ المولدات (m, m') و (m_1, m'_1) التي هي خطوط التماس . المستقيمتين $(vk_1, v'k'_1)$ و $(vk_2, v'k'_2)$ مع خطوط التماس الموافقة تعين لنا المستويات المنشودة .
يمكن تمثيل هذه المستويات بأآارها (كيف ؟) .

● المثال ٢٩٢ : ارسم مستويًا اختياريًا يقطع سطح المخروط وفق المولدات وأوجد هذه المولدات (الشكل ٩١١) .

الحل : المستوي القاطع P يجب أن يمر من ذروة المخروط (s, s') . نرم من النقطة (s, s') مستقيماً أفقياً اختياريًا ونعين أثره الشاقولي (v, v') . نأخذ على خط الأرض نقطة اختيارية P_x وننشئ آآار هذا المستوي P_x . المستوي P يقطع قاعدة المخروط وفق الرتر $(mn, m'n')$. بوصل ذروة المخروط (s, s') بنهايات الرتر (n, n') و (m, m') نحصل على المولدات المنشودة $(sn, s'n')$ و $(sm, s'm')$.

ملاحظة : يمكن اختيار النقطة P_x بحيث يمس الأثر الأفقي (P_h) للمستوي قاعدة المخروط عندها يصبح المستوي مماساً لسطح المخروط .

● المثال ٢٩٣ : لدينا مخروط والأثر الشاقولي للمستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات . أوجد هذه المولدات (الشكل ٩١٢) .

الحل : بما أن المستوي P يجب أن يمر من ذروة المخروط (s, s') التي تقع في مستوي الاسقاط الأفقي لذا ننشئ الأثر الأفقي (P_h) للمستوي بحيث يمر من النقطتين s و s' . نعين نقاط تقاطع المستوي P مع دائرة القاعدة التي يوصلها بذروة المخروط (s, s') نجد المولدات المطلوبة $(sn, s'n')$ و $(sm, s'm')$.

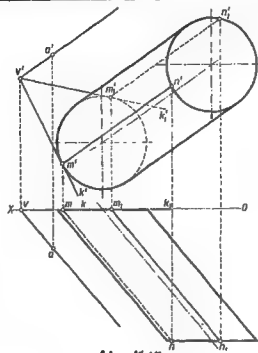
● المثال ٢٩٤ : أنشئ مستويًا مماساً لسطح المخروط إذا عرف المخطط الشاقولي (a') لنقطة من خط التماس (الشكل ٩١٣) .

الحل : نمر من النقطة a' المخطط الشاقولي (s', m') للمولد ونعين مسقطه الأفقي (sm) . نرسم من النقطة (m, m') مستقيماً جيبياً يس دائرة قاعدة المخروط . إن المستقيم الجبهي والمولد $(sm, s'm')$ يعينان المستوي المطلوب . يمكن تمثيل هذا المستوي بآثاره (كيف ؟) .

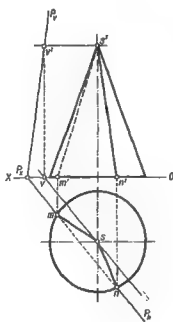
● المثال ٢٩٥ : أنشئ ماقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الاسطوانة (الشكل ٩١٤) .

الحل : إن المستوي P يقطع سطح الاسطوانة وفق قطع ناقص مسقطه الشاقولي ينطبق مع الأثر الشاقولي (P_p) للمستوي أما مسقطه الأفقي فينطبق مع المخطط الأفقي للأسطوانة . القيمة الحقيقية للقطع الناقص يمكن أن نبينها من المحاور الأساسية : المحور الكبير يساوي القطعة $\alpha\beta'$ أما المحور الصغير فيساوي قطر الاسطوانة .

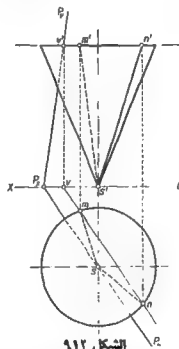
النقطة (α, α') هي النقطة الدنيا لخط التقاطع أما النقطة (β, β') فهي نقطته العليا



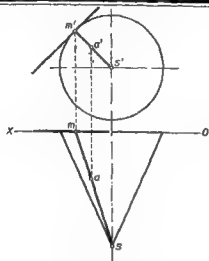
الشكل ٩١٠



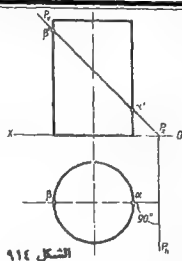
الشكل ٩١١



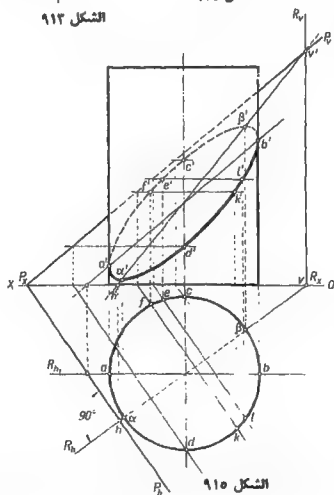
الشكل ٩١٢



الشكل ٩١٣



الشكل ٩١٤



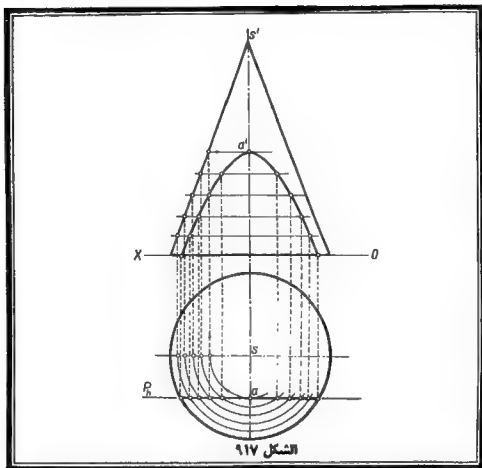
الشكل ٩١٥

● المثال ٢٩٦ : انشئ مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الاسطوانة (الشكل ٩١٥) .

الحل : نرمز من محور الاسطوانة المستوي الشاقولي R العمودي على المستوي P .
 المستوي R يقطع سطح الاسطوانة وفق المولدات ويقطع المستوي P وفق المستقيم $(h\nu, h'\nu')$ ومكان تقاطع هذه المستقيمت نجد النقطة الدنيا (α, α') والنقطة العليا (β, β') من خط التقاطع . من محور الاسطوانة ننشئ مستوي R_1 موازياً لمستوي الاسقاط الشاقولي . المستوي R_1 يقطع سطح الاسطوانة وفق المولدات الجانبية والمستوي P وفق مستقيم جهي ومكان تقاطع هذه المستقيمت نجد النقاط $(a, a'), (b, b')$ من خط التقاطع . نعين نقاط تقاطع المولدات الجانبية للاسطوانة مع المستوي P . المساقط الأفقية $(d), (c)$ لهذه النقاط معروفة (لماذا ؟) ، وباستخدام المستقيمت الأفقية نعين المساقط الشاقولية $(d'), (c')$. بصورة مماثلة نعين نقاط تقاطع عدة مولدات أخرى مع المستوي . بوصل المساقط الشاقولية لجميع النقاط المعينة على التابع نجد المسقط الشاقولي لخط التقاطع (للقطع الناقص) . القيمة الحقيقية لقطع الناقص يمكن تعيينها من المحاور الأساسية : المحور الكبير المساوي لطول القطعة $(\alpha\beta, \alpha_1\beta_1)$ والمحور الصغير المساوي لقطر الاسطوانة .

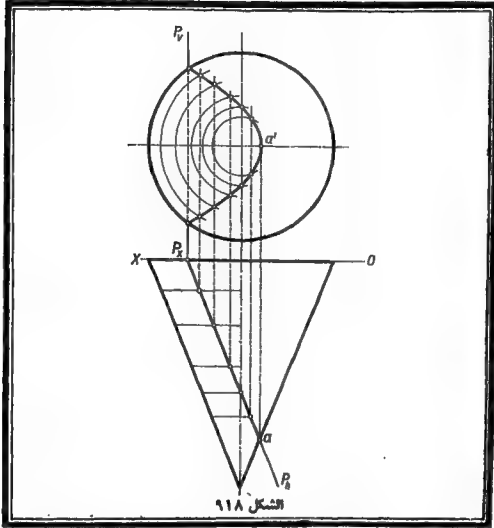
● المثال ٢٩٧ : انشئ مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط (الشكل ٩١٦) .

الحل : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطع ناقص ، مسقطه الشاقولي ينطبق مع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي أما مسقطه الأفقي فينشأ بطريقة النقاط :

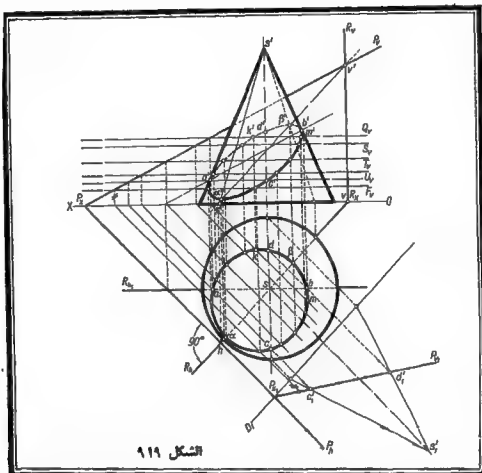


تعين من محاوره الأساسية : المحور الكبير $\alpha'\beta'$ والمحور الصغير ab الذي نعينه من المقطع الشاقولي $(a'b')$.

● المثال ٢٩٨ : انشئ ماقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط (الشكل ٩١٧) .



الحل : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطع زائد ذروته في النقطة (a, a') ، ومقطعه الأفقي ينطبق مع الأثر الأفقي (P_h) للمستوي أما مسقطه الشاقولي فينشأ بالنقاط : نأخذ المساقط الأفقية لمجموعة نقاط من خط التقاطع ونعين مساقطها الشاقولية (انظر المثال ٢٧٩ - ٢٨١) ثم نصل هذه المساقط الشاقولية بخط انسيابي (قطع زائد) .



● المثال ٢٩٩ : انشئ مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط (الشكل ٩١٨) .

الحل : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطع مكافئ، ذروته تقع في النقطة (a, a') ومسطه الأفقي ينطبق مع الأثر الأفقي (P_0) للمستوي أما مسطه الشاقولي فينشأ بالنقاط : نأخذ الماقاط الأفقية لمجموعة تقاطع من خط التقاطع ونعين ماقاطها الشاقولة ثم نصل هذه الماقاط بنقط انسيابي (قطع مكافئ).

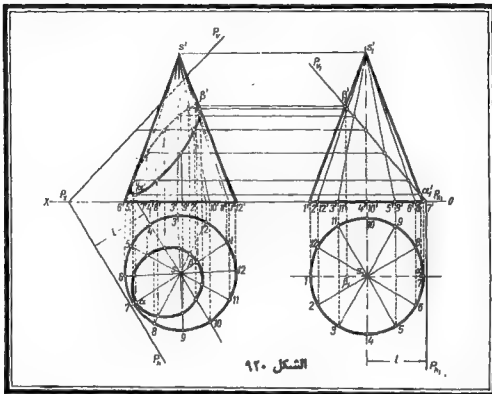
● المثال ٣٠٠ : انشاء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩١٩) . نرم من محور المخروط مستويًا شاقولياً R عمودياً على المستوي P ، هذا المستوي R يقطع سطح المخروط وفق المولدات والمستوي P وفق المستقيم ($h'v, hv'$) ومكان تقاطع هذه المستقيمتين نجد النقطة الدنيا (α, α') والعليا (β, β') لخط التقاطع . نرم من محور المخروط المستوي R_1 الموازي للمستوي الشاقولي للاسقاط فيقطع سطح المخروط وفق المولدات الجانبية والمستوي P وفق مستقيم جهبي ومكان تقاطع هذه المستقيمتين نجد أيضاً النقطتين (b, b') و (a, a') من خط التقاطع .

للحصول على نقاط خط التقاطع الواقعة على المولدات الجانبية نستعيض عن مستوي الاسقاط الشاقولي بمستوي جديد (V_1) بحيث يصبح المستوي P مستويًا أمامياً ونعين النقاط (d, d_1') و (c, c_1') لتقاطع هذه المولدات مع المستوي P_1 ثم نعين النقاط (d, d') و (c, c') .

لتعيين بعض النقاط الأخرى من خط التقاطع نلجأ لما يلي : نمررين التعلتين (β, β') و (α, α') مستويًا مساعدًا Q موازياً للمستوي H فيقطع سطح المخروط وفق دائرة والمستوي P وفق مستقيم أفقي مكان تقاطعها نجد التعلتين المنشودتين (m, m') و (k, k') . بصورة مماثلة نعين عدة نقاط أخرى ثم نصل المساقط المائلة للتقاط المعينة بخطوط انسيابية - قطوع ناقصة .

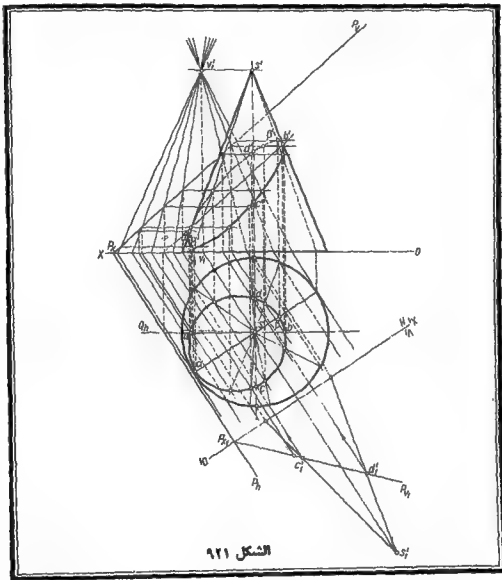
الطريقة الثانية (الشكل ٩٢٠) . ننقل المجموعة المعطاة بصورة موازية لمستوي الاسقاط الأمامي حتى يصبح المستوي P أمامياً .



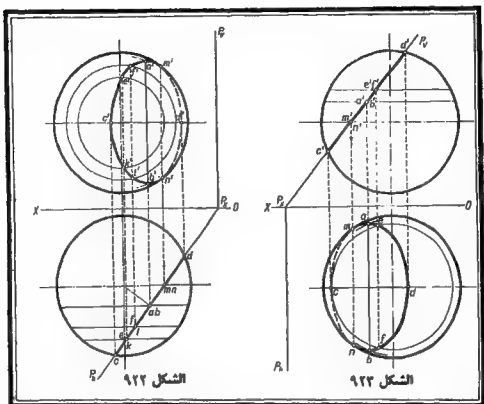
الشكل ٩٢٠

نعين مساقط خط التقاطع ثم بانتقال معاكس نعين مساقط خط التقاطع في الحالة الأولى (انظر الرسم) .

الطريقة الثالثة (الشكل ٩٢١) . النقطتان (a, a') و (b, b') على المولدات الجانبية والنقطتان (d, d') و (c, c') على المولدات الجنية للمخروط تعين كما سبق وذكرنا في الطريقة الأولى . للحصول على نقاط أخرى ثانوية نستخدم مستويات مساعدة تمر من ذروة المخروط (s, s') وآثارها الأفقية توازي الأثر P_h . كل من هذه المستويات تقطع سطح المخروط وفق مولدين والمستوي P وفق مستقيم أفقي ، مكان



تقاطعها نجد نقطتين من خط التقاطع المنشود . لتحديد النقطتين (α, α') و (β, β') نشيء مستويات مساعدة مماسة للمخروط . مكان تقاطع خطوط التماس - المولدات - والمستويات الأفقية يعين لنا هذه النقاط . من المساطات المائلة لجميع النقاط



الشكل ٩٢٢

الشكل ٩٢٢

المعينة نرسم خطوطاً انسيابية (قطعوع ناقصة) .

الحل : يقطع المستوي P سطح الكرة وفق دائرة مقطها الأفقي (c d) ينطبق مع الأثر الأفقي (P_h) للمستوي ومقطها الشاقولي بشكل قطع ناقص يمكن إنشاؤه بواسطة المحاور الأساسية : المحور الكبير هو المسقط الشاقولي ($a' b'$) للقطر المتوضع عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي والمحور الصغير هو المسقط الشاقولي ($c' d'$) للقطر المتوضع موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي .

يمكن إنشاء المسقط الشاقولي للدائرة بطريقة النقاط : نأخذ المساقط الأفقية لمجموعة نقاط من الدائرة ونعين مساقطها الشاقولية (انظر الأمثلة ٢٨٣ ، ٢٨٤) ثم نصل النقاط المعينة بخط مستمر (قطع ناقص) .

لفصل الجزء المرئي من المسقط الشاقولي للمنحنى عن جزئه اللامرئي نعين المساقط الشاقولية (n') و (m') لنقاطه الواقعة على خط الطول الأساسي .

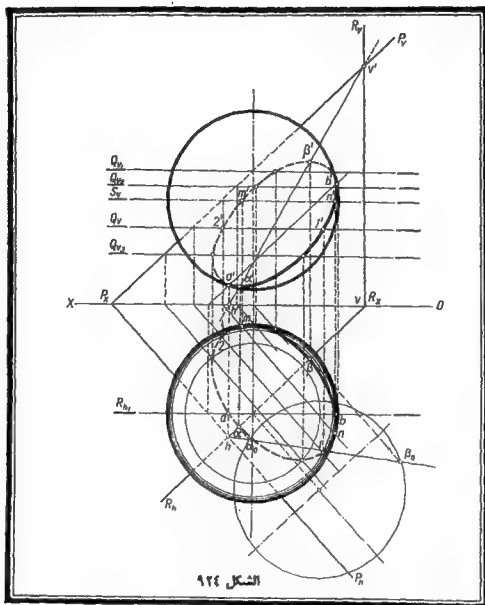
● المثال ٣٠٢ : أنشئ مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الكرة (الشكل ٩٢٣) .

الحل : يقطع المستوي P سطح الكرة وفق دائرة مسقطها الشاقولي (c', d') ينطبق مع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي ومسقطها الأفقي بشكل قطع ناقص يمكن إنشاؤه بمساعدة المحاور الأساسية : المحور الكبير وهو المسقط الأفقي (ab) لقطر العمودي على مستوي الإسقاط الشاقولي والمحور الصغير وهو المسقط الأفقي (cd) للقطر الموازي لمستوي الإسقاط الشاقولي .

يمكن إنشاء المسقط الأفقي للدائرة بطريقة النقاط لهذا نأخذ المساقط الشاقولية لمجموعة نقاط من هذه الدائرة ونعين مساقطها الأفقية (انظر الأمثلة ٢٨٣ ، ٢٨٤) ثم نصل النقاط الحاصلة بخط مستمر (قطع ناقص) .

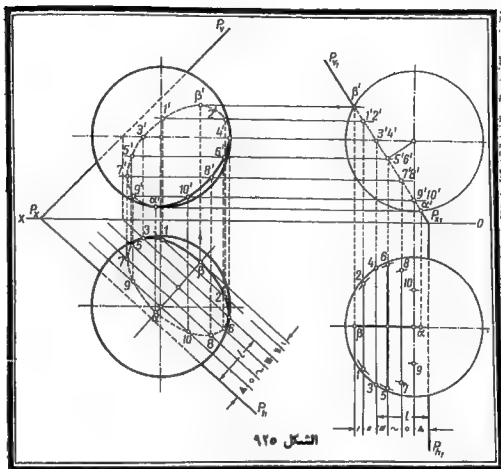
● المثال ٣٠٣ : أنشئ مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الكرة .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩٢٤) . نرمس من مركز الكرة مستويًا شاقوليًا R عمودياً على المستوي P فيقطع سطح الكرة وفق دائرة والمستوي P وفق السليم $(h'v', hv)$ مكان تقاطعها يعين لنا النقطة الدنيا (α', α) والنقطة العليا (β', β) لحظ التقاطع . حتى لانشئ القطع الناقص على مستوي الإسقاط الشاقولي نطبق المستوي R على مستوي الإسقاط الأفقي ونعين



الشكل ٩٢٤

بصورة أولية هذه النقاط في وضعية الانطباق (انظر الرسم) . لتحين النقاط الثانوية من خط التقاطع نمر بين النقطتين (β, β') و (α, α') مجموعة مستويات مساعدة $Q \dots Q_1$ موازية لمستوي الإسقاط الأفقي . مثلاً المستوي Q يقطع سطح الكرة



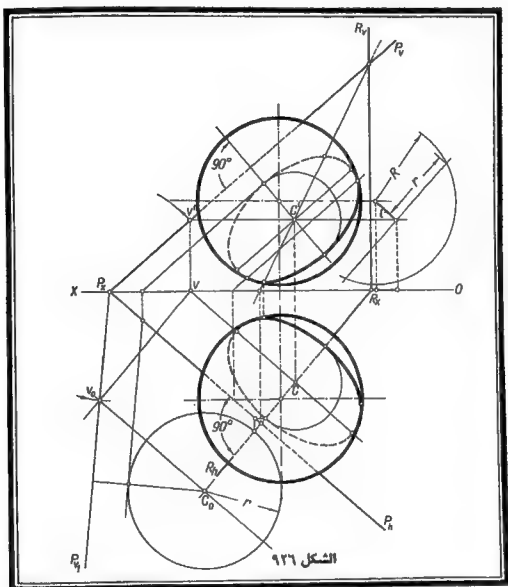
وفق دائرة: والمستوي P وفق مستقيم أهلي مكان تقاطعها يعين لنا النقطتين $(1,1')$, $(2,2')$

لفصل الجزء المرئي من المسقط الشاقولي عن الجزء اللامرئي يمر من مركز الكرة

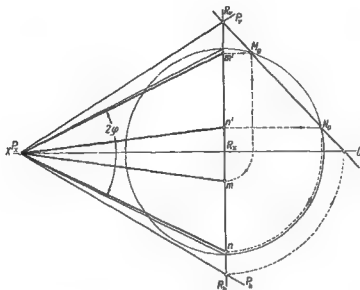
مستويًا R_1 موازياً لمستوي الاسقاط الشاقولي . هذا المستوي R_1 يقطع سطح الكرة وفق خط الطول الأسامي والمستوي P وفق مستقيم جهبي ، مكان تقاطعها نجد التقطعين (b, b') ، (a, a') . لفصل الجزء المرئي من المسقط الأفقي عن الجزء اللامرئي نغور من مركز الكرة المستوي S ، الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي . هذا المستوي يقطع سطح الكرة وفق خط الاستواء ، والمستوي P وفق مستقيم أفقي مكان تقاطعها نجد التقطعين (n, n') ، (m, m') . بعدها نصل المساطات المتماثلة لجميع النقاط الحاصلة بخط مستمر - قطوع ناقصة .

الطريقة الثانية (الشكل ٩٢٥) . ننقل المجموعة المفروضة بصورة موازية لمستوي الاسقاط الأفقي حتى الوضعية بحيث يصبح المستوي P أمالياً بعدها نعين مساطات خط التقاطع ثم بانتقال عكسي نجد مساطه في الوضعية الأولية - قطوع ناقصة (الإنشاء واضح من الرسم) .

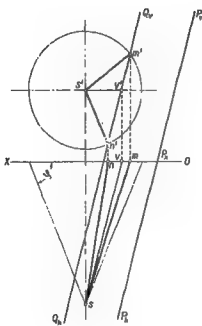
الطريقة الثالثة (الشكل ٩٢٦) . ننزل من مركز الكرة عموداً على المستوي P ونعين قاعدته (c, c') - مركز الدائرة . باستخدام إنشاء مساعد (انظر الرسم) نعين نصف قطر r ، هذه الدائرة من القيمة الحقيقية للمسافة l من مركز الكرة حتى المستوي P ومن نصف قطر R الكرة . نطبق المستوي P على



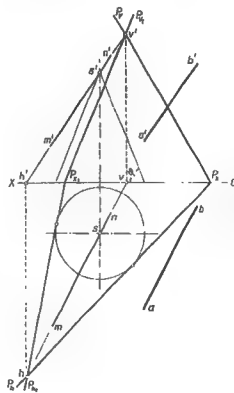
مستوي الاسقاط الأفقي ونعين وضعية (C_0) مركز الدائرة . نرمم في وضعية الانطباق هذه الدائرة ثم نعين ماقطها (انظر المثال ٢٢٩) .



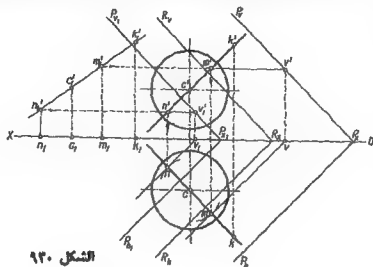
الشكل ١٢٧



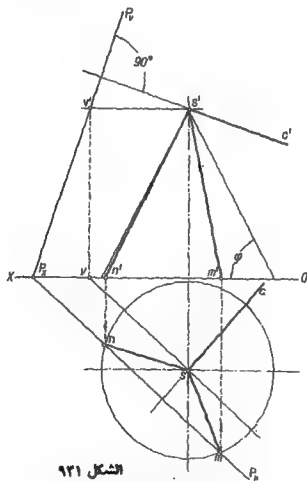
الشكل ١٢٨



الشكل ١٢٩



الشكل ١٣٠



الشكل ١٣١

• المثال ٣٠٤ : انشئ في المستوي P مستقيماً بشكل مع خط الأرض زاوية قدرها φ (الشكل ٩٢٧) .

الحل : اهل الهندسي للمستويات المشكلة في الفراغ مع خط الأرض الزاوية المفروضة هو سطح مخروطي دوراني قائم ذو زاوية قدرها φ في ذروته P_2 . المستويات المطلوبة ماهي إلا مولدات المخروط التي يقطع بها المستوي P هذا السطح (الإنشاء واضح من الرسم) .

• المثال ٣٠٥ : لدينا النقطة S والمستوي P . انشئ من النقطة S مستقيماً يوازي المستوي P ويشكل مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية φ (الشكل ٩٢٨) .

الحل : اهل الهندسي في الفراغ للمستويات المارة من نقطة S والمائلة على مستوي الإسقاط الشاقولي بزاوية قدرها φ هو سطح مخروطي دوراني قائم ذروته في النقطة S ومولداته تميل على مستوي الإسقاط الشاقولي بزاوية قدرها φ . المستويات المطلوبة هي تلك المولدات التي يقطع بها المستوي Q المار من النقطة S والموازي للمستوي P هذا السطح المخروطي (الإنشاء واضح من الرسم) .

• المثال ٣٠٦ : لدينا النقطة S والمستقيم AB . انشئ من النقطة S المستوي P الذي يميل على مستوي الإسقاط الأفقي بزاوية مفروضة φ ويوازي المستقيم AB (الشكل ٩٢٩) .

الحل : إن المستوي الذي يميل على مستوي الإسقاط الأفقي بزاوية مفروضة φ ويمر من النقطة S هو أي مستوي مماس لسطح مخروطي دوراني قائم ذروته في النقطة S ومولداته تشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي نفس الزاوية φ . المستوي

المنشود هو أحد هذه المستويات الذي يجتري مستقيماً موازياً لـ AB . وهكذا نشيء من النقطة S - ذروة المخروط - مستقيماً MN موازياً للمستقيم AB ثم نضمن هذا المستقيم في متر بماس لسطح المخروط . للسألة حلان (الإنشاء واضح من الرسم) .

● المثال ٢٠٧ : انشء مستويّاً مماساً لسطح الكرة وموازياً للمستوي R (الشكل ٩٣٠) .

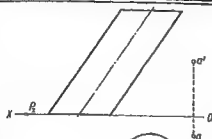
الحل : نشيء من مركز الكرة (c, c') مستقيماً عمودياً على المستوي R ونعين نقطتي تقاطعه (n, n') , (m, m') مع سطح الكرة . وهنا من السهولة بكان أن نأخذ على هذا المستقيم القطع $(cn, c'n')$, $(cm, c'm')$ المساوية لنصف قطر الكرة . ثم نشيء من التقاطع الخاصة (n, n') , (m, m') المستويين P_1P_1 الموازيين للمستوي R أو (ذات الشيء) مستويين عموديين على المستقيم $(mn, m'n')$ (الإنشاء واضح من الرسم) .

● المثال ٢٠٨ : أنشء من النقطة S مستقيماً يشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية قدرها θ ويتعامد مع المستقيم CS (الشكل ٩٣١) .

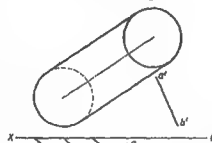
الحل : المحل الهندسي للمستقيات المارة من النقطة S والتي تشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية θ هو سطح مخروطي دوراني قائم ذروته في النقطة S ومولداته تميل على مستوي الإسقاط الأفقي بزاوية θ . كذلك فإن المحل الهندسي في الفراغ للمستقيات المارة من النقطة S والعمودية على المستقيم CS هو المستوي العمودي على المستقيم CS . وهكذا المستقيات المنشودة هي نتيجة تقاطع سطح المخروط بمستوي عمودي على المستقيم CS (الإنشاء واضح من الرسم) .

مسائل

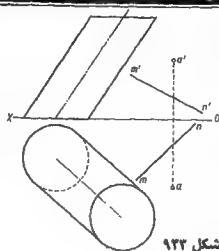
- ٤٦٨ - أنشئ من النقطة A المستوي P الذي يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم عين هذه المولدات (الشكل ٩٣٢) .
- ٤٦٩ - أنشئ من النقطة A المستوي P الموازي للمستقيم MN والقاطع لسطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم عين هذه المولدات (الشكل ٩٣٣) .
- ٤٧٠ - أنشئ من المستقيم AB متوابعاً يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم عين هذه المولدات (الشكل ٩٣٤) .
- ٤٧١ - أنشئ متوابعاً اختيارياً P يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٣٥) .
- ٤٧٢ - أنشئ آثار المستوي المماس لسطح الأسطوانة والمار من النقطة K الواقعة على سطحها (الشكل ٩٣٦) .
- ٤٧٣ - أنشئ آثار المستوي المماس لسطح الأسطوانة والمار من النقطة K (الشكل ٩٣٧) .
- ٤٧٤ - أنشئ آثار المستوي المماس لسطح الاسطوانة المائلة والموازي للمستقيم AB (الشكل ٩٣٨) .
- ٤٧٥ - أنشئ من النقطة A المستوي P الذي يقطع سطح مخروط وفق المولدات ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٣٩) .



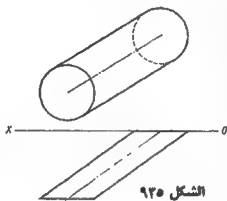
الشكل ٩٣٢



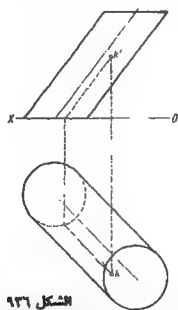
الشكل ٩٣٤



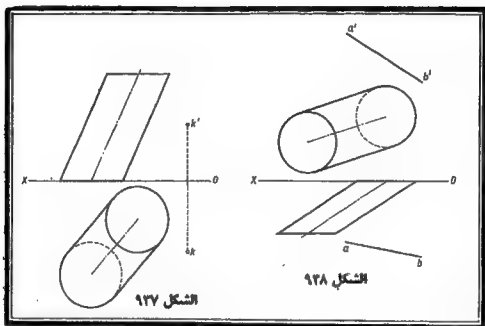
الشكل ٩٣٣



الشكل ٩٣٥



الشكل ٩٣٦



٤٧٦ - أنشئ المستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات ويزاوي المستقيم AB ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٤٠) .

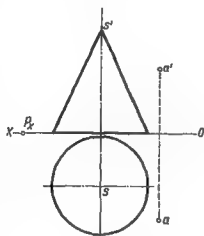
٤٧٧ - أنشئ المستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات ويزاوي المستوي Q . أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٤١) .

٤٧٨ - أنشئ آثار المستوي الذي يس سطح المخروط ويمر من النقطة K الواقعة على سطحه (الشكل ٩٤٢) .

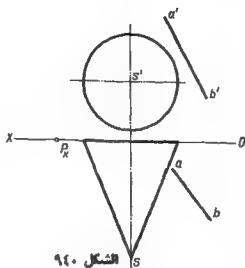
٤٧٩ - أنشئ من النقطة K مستويًا مماسًا لسطح المخروط (الشكل ٩٤٣) .

٤٨٠ - أنشئ مستويًا موازيًا للمستقيم AB ومماسًا لسطح المخروط (الشكل

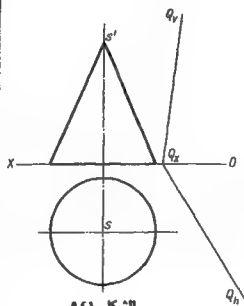
٩٤٤) .



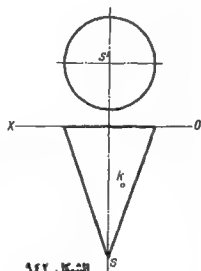
الشكل ٩٣٩



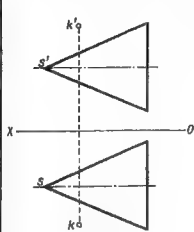
الشكل ٩٤٠



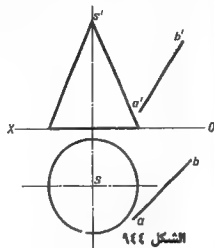
الشكل ٩٤١



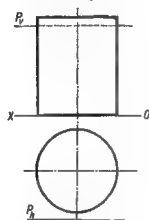
الشكل ٩٤٢



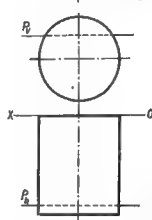
الشكل ٩٤٣



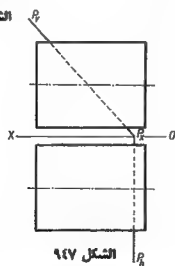
الشكل ٩٤٤



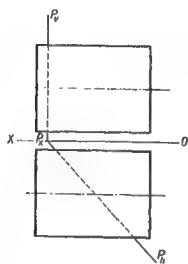
الشكل ٩٤٥



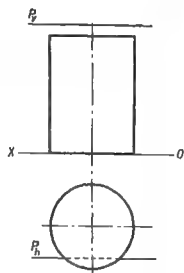
الشكل ٩٤٦



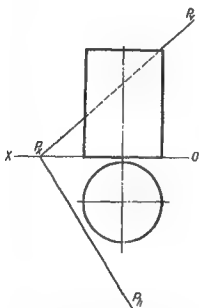
الشكل ٩٤٧



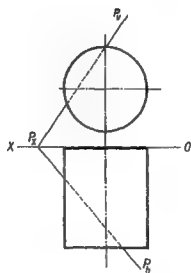
الشكل ٩٤٨



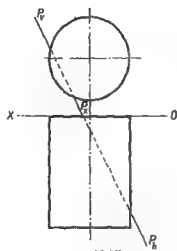
الشكل ٩٤٩



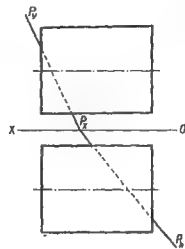
الشكل ٩٥٠



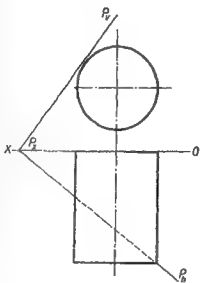
الشكل ٩٥١



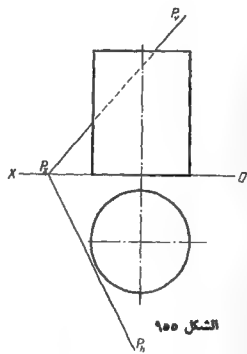
الشكل ٩٠٢



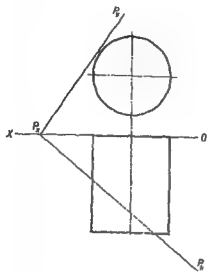
الشكل ٩٠٣



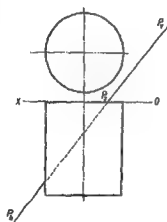
الشكل ٩٠٤



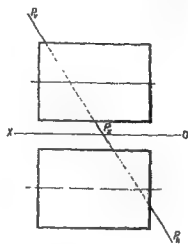
الشكل ٩٠٥



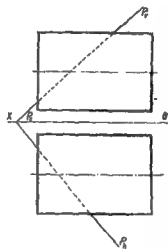
الشكل ٩٥٦



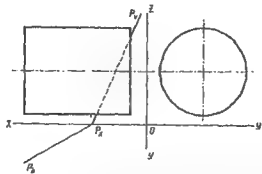
الشكل ٩٥٨



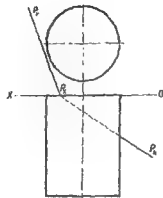
الشكل ٩٥٧



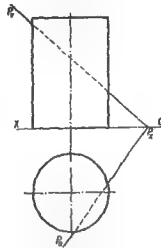
الشكل ٩٥٩



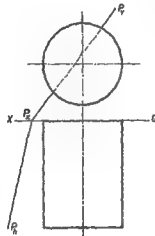
الشكل ٩٦٠



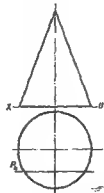
الشكل ٩٦١



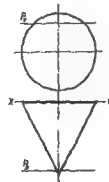
الشكل ٩٦٢



الشكل ٩٦٣



الشكل ٩٦٤



الشكل ٩٦٥

٤٨١ - أنشئ مفاط مقطع اسطوانة دائرية قائمة بالمستوي P (الشكل

٩٤٥ - ٩٦٣) .

٤٨٢ - أنشئ مفاط مقطع مخروط دائري قائم بالمستوي P (الشكل

٩٦٤ - ٩٨٢) .

٤٨٣ - أنشئ مفاط مقطع كرة بالمستوي P (الشكل ٩٨٣) .

٤٨٤ - أنشئ آثار المستوي المماس لسطح الكرة والمار من المستقيم AB

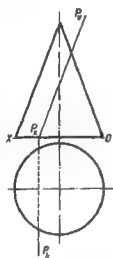
(الشكل ٩٨٤) .

٤٨٥ - أنشئ آثار المستوي المماس لسطح الكرة إذا علم المقطع الشاقولي

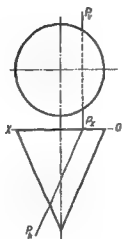
(k') لنقطة التماس (الشكل ٩٨٥)

٤٨٦ - أنشئ المستوي P الموازي للمستوي Q والمماس لسطح الكرة

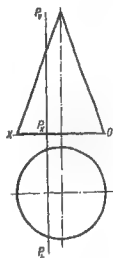
(الشكل ٩٨٦) .



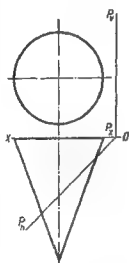
الشكل ٩٦٦



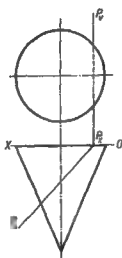
الشكل ٩٦٧



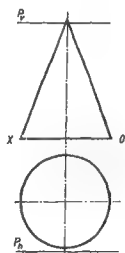
الشكل ٩٦٨



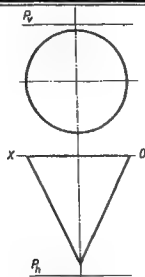
الشكل ٩٦٩



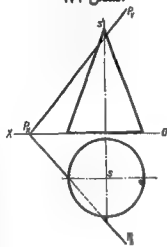
الشكل ٩٧٠



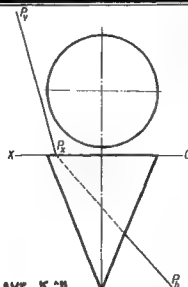
الشكل ٩٧١



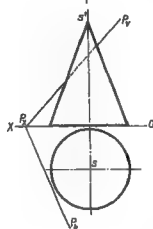
الشكل ١٧٢



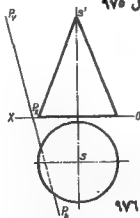
الشكل ١٧٤



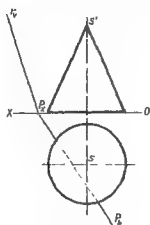
الشكل ١٧٣



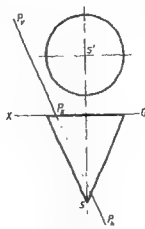
الشكل ١٧٥



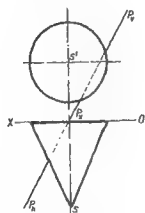
الشكل ١٧٦



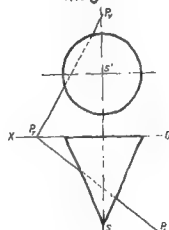
الشكل ٩٧٧



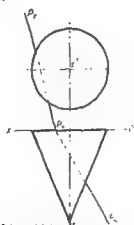
الشكل ٩٧٨



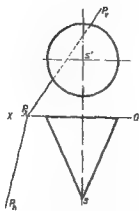
الشكل ٩٧٩



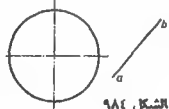
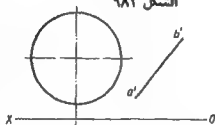
الشكل ٩٨٠



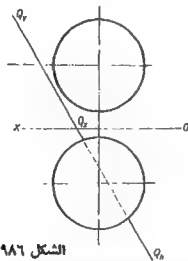
الشكل ٩٨١



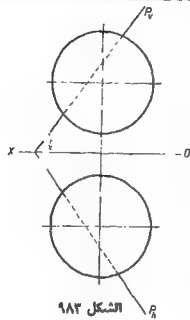
الشكل ٩٨٢



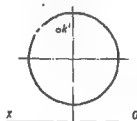
الشكل ٩٨٤



الشكل ٩٨٦



الشكل ٩٨٣



الشكل ٩٨٥

البحث الرابع والعشرون

انفراد السطوح

أمثلة

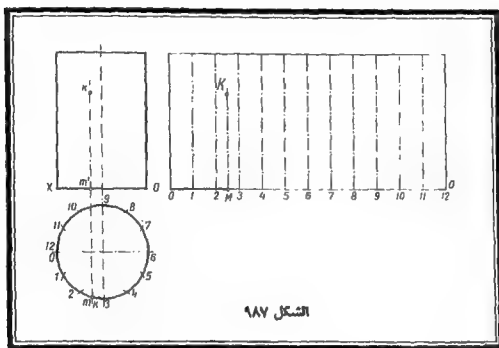
● المثال ٣٠٩ : ارمم انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة (الشكل ٩٨٧).

الحل : إن انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هو مستطيل طول قاعدته $2\pi r$ وارتفاعه h . حتى نتجنب الحسابات المتعلقة بتعيين طول محيط الدائرة يرمم عادة في قاعدة الاسطوانة مضلع منتظم ذو اثني عشر ضلعاً (على الرسم نين نقط الرؤوس $0, 1, 2, \dots$) ويعتبر محيطه مساوياً لطول قاعدة الاسطوانة . وهكذا انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة يستبدل بدقة كافية في الحياة العملية بانفراد السطح الجانبي لموشور منتظم قائم ذو اثني عشر وجهاً مرسوم داخل الاسطوانة المفروضة .

نين كذلك كيف يمكن نقل النقطة (k, k') من سطح الاسطوانة إلى الانفراد . نأخذ على قاعدة المستطيل القطعة OM الماوية لطول القوس om ثم نرفع من النقطة M عموداً نأخذ عليه القطعة MK الماوية لـ $m'k'$.

● المثال ٣١٠ : ارمم انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة مقطوعة (الشكل ٩٨٨) .

الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة إلى ١٢ جزء متساو ونرمم من نقاط التقسيم هذه المولدات . نرمم على الجانب مستقيماً نأخذ عليه على التوالي من نقطة اختيارية

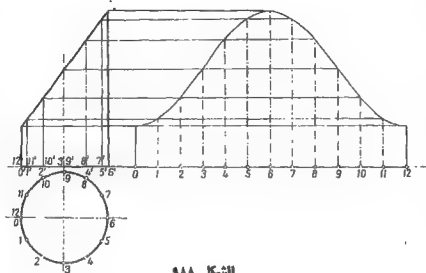


الشكل ٩٨٧

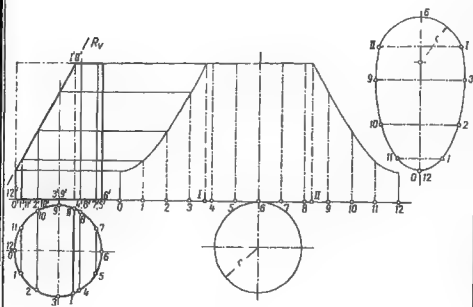
أضلاع المضلع الاثني عشري المنتظم المرسوم في قاعدة الاسطوانة . نرمس من النقاط 0, 1, 2, ..., 12 أعمدة على المستقيم نأخذ عليها أطوال المولدات الموافقة . بوصل نهايات المولدات بنقط انسيابي نجد انفراد السطح الجانبي للاسطوانة المقطوعة .

● المثال ٣١١ : ارسم الانفراد الكلي للجزء السفلي لاسطوانة دائرية قائمة مقطوعة بالمستوي R (الشكل ٩٨٩) .

الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة إلى ١٢ جزء متساو ونرمس من نقاط التقسيم هذه المولدات . من الرسم يتضح أن مولدات الاسطوانة تقطع المستوي R على المجال



الشكل ٩٨٨



الشكل ٩٨٩

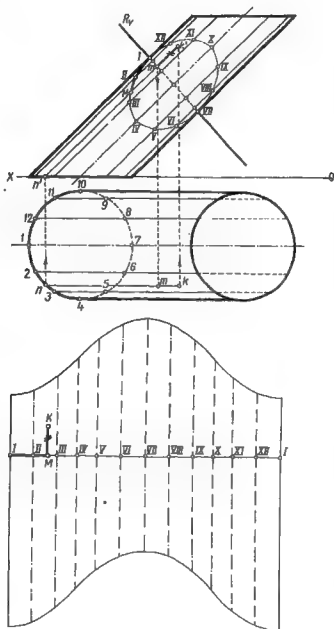
II 10 . نرم على الجانب مستقيماً وتأخذ عليه على التابع من نقطة اختيارية o قطعاً متساوية $01, 12, \dots, II$ وقطعتين متساويتين II 12 و 01 . نرم من النقاط $01, 12, \dots, II$ أعمدة على المستقيم تأخذ عليها أطوال المولدات الموافقة . بوصل نهايات المولدات المتوضعة على المجال II - I بخط مستقيم وعلى المجال الآخر بخط انسيابي نجد انفراد السطح الجانبي للأسطوانة المقطوعة .

للمصول على الانفراد الكلي علينا أن نضيف إلى السطح الجانبي للأسطوانة : القاعدة السفلية وهي بشكل دائرة ، الجزء الأول من القاعدة العلوية بشكل قطاع دائري والجزء الآخر من القاعدة العلوية بشكل جزء من قطع ناقص يلزم تعيين قيمته الحقيقية أولاً (انظر الرسم) .

ملاحظة : إذا كان المستوي القاطع عاماً فانه من المفضل تدوير المجموعة حول محور الاسطوانة بزاوية مناسبة θ حتى الوضعية التي يصبح فيها المستوي مُسَطَّحاً .

● المثال ٢١٢ : ارم انفراد السطح الجانبي لاسطوانة مائلة ذات قاعدة دائرية (الشكل ٩٩٠) .

الحل : انفراد السطح الجانبي لاسطوانة مائلة يتم كأنفراد موشور مائل (انظر المثال ٢٧١) . نرم مستويًا مساعدًا R عمودياً على محور الاسطوانة ونقسم بذلك الاسطوانة إلى اسطوانتين قائمتين ذات قاعدة مشتركة . نعين القيمة الحقيقية المقطع العمودي (الناظمي) . نقسم قاعدة الاسطوانة إلى ١٢ جزء متساو . من نقاط التقسيم هذه نرم المولدات التي تقسم محيط المقطع الناظمي للأسطوانة إلى ١٢ جزء غير متساو $I - II, II - III, \dots, I - II, II - III$ نرم على الجانب مستقيماً تأخذ عليه من نقطة اختيارية القطع $I - II, II - III, \dots$ المساوية لأضلاع المضلع $I \dots III, II, I$ الموسوم داخل محيط المقطع



الشكل ٩٩٠

الناظمي . نرم من النقاط الناتجة I , II , III ... I أحمدة على المستقيم 1-1 وعلى كل منها نأخذ أطوال المولدات للجزء العلوي والسفلي من الاسطوانة المعطاة بأطوالها الحقيقية (لماذا؟). يوصل نهايات المولدات بخط انسيابي نحصل على انفراد السطح الجانبي للاسطوانة المائلة. نبين كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما K واقعة على سطح الاسطوانة إلى الانفراد بمعرفة المقطع الأفقي (k) لهذه النقطة . نرم من النقطة k المقطع الأفقي (k n) لمولد مساعد ثم نعين على مسقطه الشاقولي بدلالة النقطة k النقطة ' k . نقل النقطة (m , m') من المولد (kn , k'n') الواقعة على محيط المقطع الناظمي إلى الانفراد ومن النقطة M ننشئ عموداً على المستقيم 1-1 وعليه نأخذ إلى الأعلى القطعة MK = m'k' .

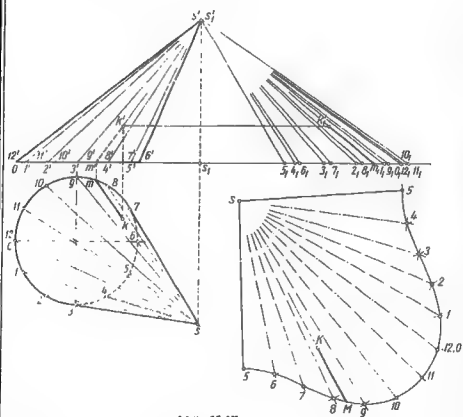
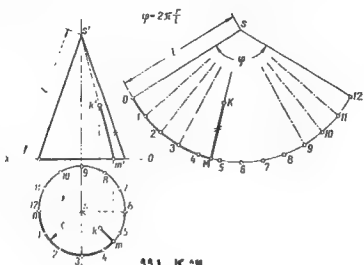
ملاحظة : إذا لم يكن محور الاسطوانة موازياً لأحد مستويات الاسقاط فإننا مسبقاً نضع الاسطوانة بحيث يصبح محورها موازياً للمستوي H أو V (لماذا ؟) .

● المثال ٢١٢ : ارم انفراد السطح الجانبي لخروط دائري قائم (الشكل ٩٩١) .

الحل : إن انفراد السطح الجانبي لخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته r

وطول مولده l هو قطاع دائري نصف قطره l وزاويته المركزية $\varphi = \frac{2\pi r}{l}$.

لكي نتجنب الحسابات المتعلقة بتعيين طول قوس القطاع أو الزاوية φ عادة نرم في قاعدة المخروط مضلعاً منتظماً لإثني عشرياً (على الرسم نبين فقط رؤوسه 0,1,2...) ومن ثم من نقطة اختيارية ما S نرم قوساً نصف قطره l ونعين على التوالي من إحدى نقاطه اثني عشر قوساً أو ثلثها تساوي أضلاع المضلع الاثني عشري . وهكذا انفراد السطح الجانبي لخروط دائري قائم يستبدل



بدقة كافية في الحياة العملية بانفراد هرم منتظم اثني عشري مرسوم داخل ذلك المخروط .

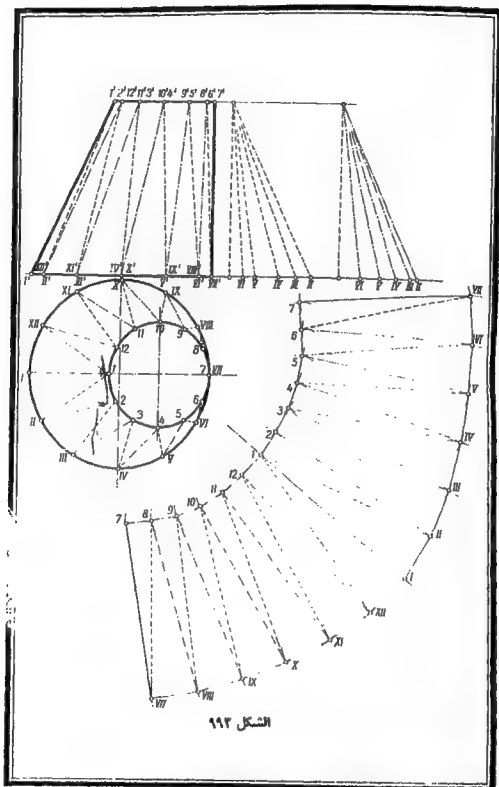
نبن كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما K واقعة على سطح المخروط إلى الانفراد بعرفة مسقطها الأفقي (k) . نرسم من النقطة k المسقط الأفقي (sm) مولد مساعد ونعين مقطه الشاقولي $(s'm')$ ثم بدلالة النقطة k نجد النقطة k' على المستقيم $s'm'$. نعين المولد SM على الانفراد وعليه نأخذ الطول الحقيقي للقطعة $(sk, s'k')$ من المولد .

● المثال ٢١٤ : ارسم انفراد السطح الجانبي لمخروط مائل ذي قاعدة دائرية (الشكل ٩٩٢) .

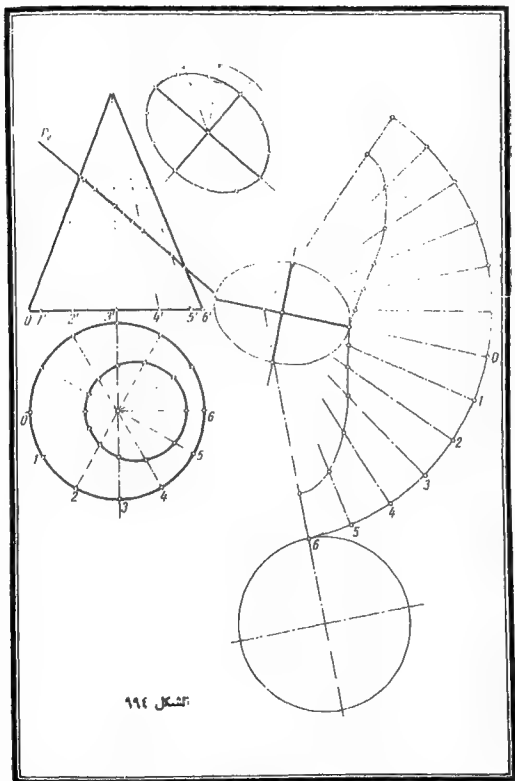
الحل : نقسم قاعدة المخروط إلى اثني عشر جزء متساو وننشئ من نقاط التقسيم المولدات . وهكذا نقسم السطح الجانبي للمخروط إلى اثني عشر مثلث متع بن يمكن بدقة كافية للحياة العملية استبدالها بمثلثات مستوية ، إذن نستبدل السطح الجانبي للمخروط بالسطح الجانبي لهرم اثني عشري مرسوم في هذا المخروط . نعين القيم الحقيقية لجميع مولدات المخروط (انظر الرسم) وننشئ على التوالي المثلثات المستوية s_1o_1, s_2o_2, \dots . بوصول نهايات المولدات بمخط انسيابي نحصل على انفراد السطح الجانبي للمخروط المائل . بالإضافة إلى ذلك نبن على الرسم طريقة نقل نقطة اختيارية K من سطح المخروط إلى الانفراد .

● المثال ٢١٥ : ارسم انفراد السطح الجانبي لجذع مخروط مائل دون استخدام ذروته (الشكل ٩٩٣)

الحل : نقسم القاعدة العلوية والسفلية إلى اثني عشر جزء متساو ونصل بمستقيمت (مولدات) النقاط $1 - I, 2 - II, \dots$ أي نرسم داخل جذع المخروط جذع هرم



الشكل ١٩٢



اثنى عشري . باستبدال كل شبه منحرف منحني بشبه منحرف مستوي نقسها إلى مثلثات وبعين القيم الحقيقية لجميع المولدات والأقطار (انظر الرسم) . ننشئ على التوالي المثلثات $12 II, 1 III, \dots$ وبوصل نهايات المولدات I, II, III, \dots وننشئ على خطوط انسيابية نجد بدقة كافية انفراد السطح الجانبي لجذع الخروط .

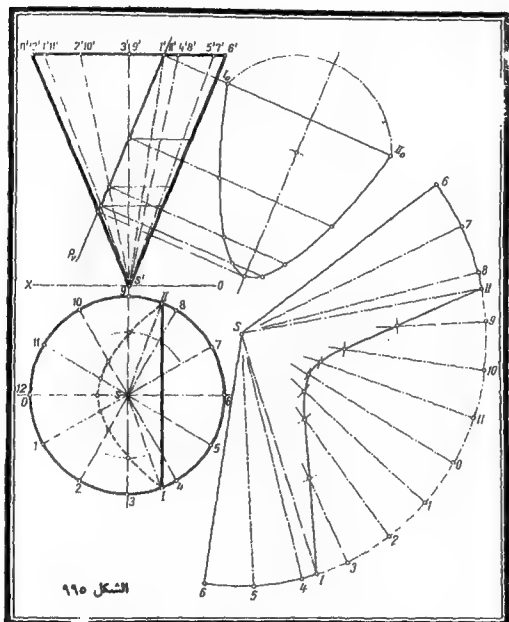
● المثال ٣١٦ : ارمم انفراد الجزء السفلي لخروط دائري قائم مقطوع بالمستوي P (الشكل ٩٩٤) .

الحل : نقسم قاعدة الخروط إلى اثني عشر جزءاً متساوياً ونرسم من نقاط التقسيم المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع المستوي P . نرسم انفراد الخروط بأكمله (انظر المثال ٣١٣) ثم نأخذ على كل مولد القيمة الحقيقية لطول القطعة الموافقة لمولد الخروط من ذروته حتى نقطة تقاطعه مع المستوي ثم نصل نهايات هذه القطع بنقط انسيابية . للحصول على الانفراد الكلي للجزء السفلي من الخروط علينا أن نضيف إلى انفراد السطح الجانبي القاعدة التي هي بشكل دائرة والمقطع الذي هو بشكل قطع ناقص الذي نعين مسبقاً قيمة الحقيقية (انظر الرسم) .

ملاحظة : إذا كان المستوي القاطع ذو وضعية عامة فإنه من الأنسب تدوير المجموعة بأكملها حول محور الخروط بزاوية مناسبة φ حتى يصبح المستوي القاطع مُسَطَّلاً .

● المثال ٣١٧ : ارمم الانفراد الكلي للجزء السفلي لخروط دائري قائم مقطوع بالمستوي P (الشكل ٩٩٥) .

الحل : نقسم قاعدة الخروط إلى اثني عشر جزءاً متساوياً وننشئ من نقاط التقسيم المولدات . من الإنشاء يتضح أنه على مجال القوس $I \circ II$ فقط تقاطع المولدات مع المستوي P . نرسم انفراد الخروط بأكمله ونرسم عليه المولدات الإضافية $S I, S$.



على كل مولد قاطع للمستوي P نأخذ القيمة الحقيقية لطول القطعة الواقعة لمولد
المحروط من ذروته حتى نقطة تقاطعه مع المستوي . ثم نعمل نهايات القطع بخط

انسيابي . للحصول على الانفراد الكلي للجزء السفلي للمخروط علينا أن نضيف إلى انفراد
السطح الجانبي : جزء القاعدة - قطاع دائري والمقطع الذي هو بشكل قطع مكافئ
بعد أن نعين مسبقاً قيمته الحقيقية (انظر الرسم) .

مسائل

- ٤٨٧ - اقطع الاسطوانة الدائرية القائمة بالمستوي P وارسم الانفراد الكلي لأحد جزئيه
(الشكل ٩٤٥ - ٩٦٣) .
- ٤٨٨ - اقطع المخروط الدائري القائم بمستوي وارسم الانفراد الكلي لأحد جزئيه
(الشكل ٩٦٤ - ٩٨٢) .

البحث الخامس والعشرون

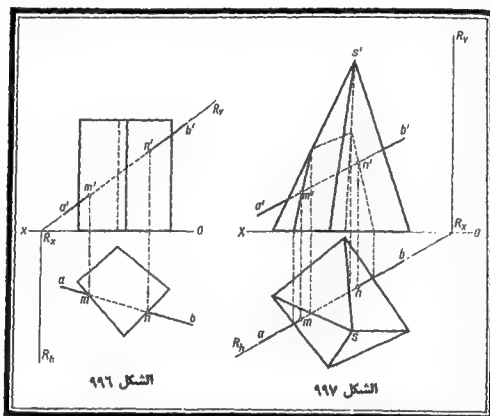
تقاطع مستقيم مع سطح

لتعين نقطة تقاطع مستقيم مع سطح جسم ما (موشور ، هرم ، اسطوانة ، مخروط ، كرة إلخ) نلجأ إلى طريقة ماثلة كما في تعيين نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي أي :

- ١- نضم المستقيم المفروض في مستوي مساعد .
 - ٢- نعين خط (مستقيم أو خط منحنى) تقاطع السطح المفروض مع المستوي المساعد .
 - ٣- في مكان تقاطع المستقيم المفروض مع خط التقاطع نجد النقاط المنشودة .
- في الحالة الخاصة يمكن أن يكون المستقيم مماساً للسطح .
- ملاحظة :** عند ضم المستقيم في مستوي مساعد يختار هذا المستوي بحيث تكون مسافات خط تقاطعه مع السطح على مستويات الإسقاط بشكل خطوط بسيطة - مستقيم أو دائرة .

أمثلة

- المثال ٢١٨ : أوجد نقاط تقاطع سطح الموشور مع المستقيم AB (الشكل ٩٩٦) .
- الحل :** نضم المستقيم AB في مستوي أمامي (أو شاقولي) R فيقطع سطح الموشور



وفق مضلع رباعي . مكان تقاطع المساط الأفقية للمضلع الحاصل والمستقيم المفروض نجد المساط الأفقية (n) ، (m) للنقاط المنشودة . بمعرفتها نجد المساط الشاقولية (n') ، (m') على المستقيم $a'h'$. في هذه الحالة يمكن تعيين النقاط المطلوبة دون الاستعانة بالمستوي R (لماذا) ؟

• المثال ٣١٩ : أوجد نقاط تقاطع سطح الهرم مع المستقيم AB (الشكل ٩٩٧) .

الحل : نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R يقطع سطح الهرم وفق مضلع الهندسة الوصفية - م ٣١

رباعي . مكان تقاطع الماسقط الشاقولية للضلع الناتج والمستقيم المفروض نجد الماسقط الشاقولية (n') , (m') للتقاط المنشودة . بمعرفتها نجد الماسقط الأفقية (n) , (m) على المستقيم ab .

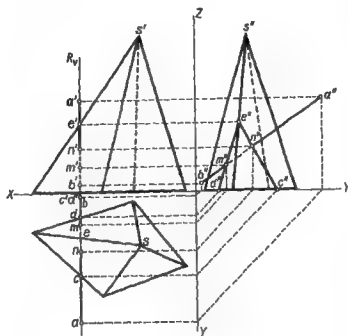
● المثال ٣٢٠ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الهرم (الشكل ٩٩٨) .
الحل : نضم المستقيم AB في مستوي جنبي R فيقطع سطح الهرم وفق المثلث CDE . مكان تقاطع الماسقط الجنبية للمثلث الناتج والمستقيم المفروض نجد الماسقط الجنبية (n') , (m') للتقاط المنشودة . بمعرفتها نجد التقاط m , n على المستقيم ab والتقاط m' , n' على المستقيم $a'b'$.

● المثال ٣٢١ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الاسطوانة (الشكل ٩٩٩) .

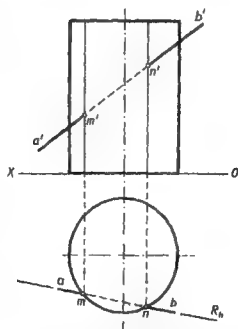
الحل : نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R فيقطع سطح الاسطوانة وفق مولدين . مكان تقاطع الماسقط الشاقولية لهذه المولدات والمستقيم المفروض نجد الماسقط الشاقولية (n') , (m') للتقاط المنشودة . بمعرفة التقاط m' , n' نعين m , n على المستقيم ab . (يمكن ضم المستقيم AB في مستوي أمامي) .

● المثال ٣٢٢ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الاسطوانة المائلة (الشكل ١٠٠٠) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي لمحور الاسطوانة . لهذا نأخذ على المستقيم $(ab, a'b')$ نقطة اختيارية (c, c') ونرسم منها المستقيم $(cd, c'd')$ الموازي لمحور الاسطوانة . هذا المستوي المعين بمستقيمين متقاطعين يقطع سطح الاسطوانة بمولدين . نعين الآثار الأفقية (h, h') , (h_1, h'_1) للمستقيمين



الشكل ٩٩٨



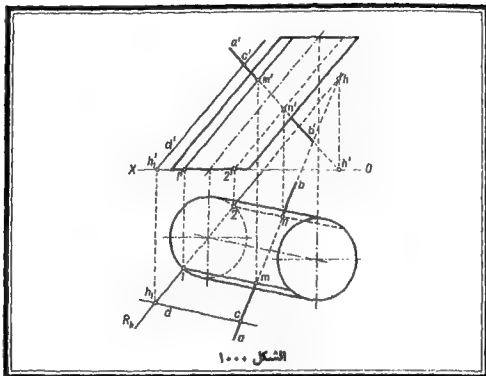
الشكل ٩٩٩

الشافوي للمستوي غير ضروري لحل المسألة (لماذا ؟) . المستوي R يقطع قاعدة الاسطوانة وفق الوتر $(12,1'2')$. من النقطتين $(1,1')$, $(2,2')$ نرمس مولدات الاسطوانة . مكان تقاطع المساطات الشافوية لهذه المولدات مع المقط الشافوي $(a'b')$ للمستقيم المفروض نجد المساطات الشافوية (m') , (n') للنقاط المنشودة . بمعرفة النقطتين m' , n' نجد النقطتين m, n على المستقيم ab .

[ضم المستقيم AB في مستوي شافوي أو أمامي يعقد حل المسألة (لماذا ؟)] .
ملاحظة : في الحالة الخاصة (متى ؟) من الأفضل أخذ المستوي المساعد المار من المستقيم AB بشكل مستقيمين موازيين لمحور الاسطوانة .

● **المثال ٢٢٣ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل ١٠٠١) .
الحل : يقطع المستقيم المفروض السطح الجانبي للمخروط في نقطة وحيدة (m, m') . نضم المستقيم AB في مستوي أمامي R مار من ذروة المخروط S فيقطع هذا المستوي سطح المخروط وفق مستقيمين مولدين (على الرسم نين مولداً واحداً) . مكان تقاطع المساطات الأفقية للمستقيمتين الحاصلة والمستقيم المفروض نجد المقط الأفقي (m) للنقطة المنشودة . بمعرفة هذه النقطة m نعين النقطة m' الواقعة على المقط الشافوي $(a'b')$ للمستقيم المفروض (لماذا ؟)

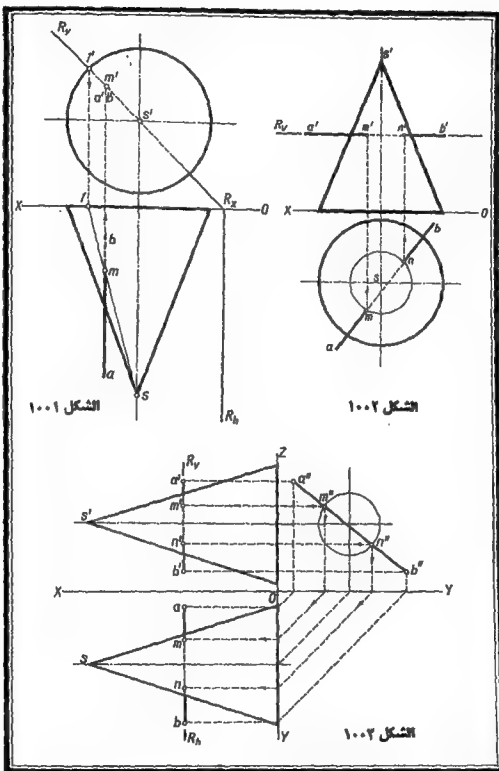
● **المثال ٢٢٤ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل ١٠٠٢) .
الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي H فيقطع سطح المخروط وفق دائرة . مكان تقاطع المساطات الأفقية للدائرة والمستقيم المفروض نجد المساطات الأفقية (m) , (n) للنقاط المنشودة . بمعرفة m, n نجد النقطتين m' , n'



على المستقيم $a'b'$. يمكن أن نضم المستقيم AB في مستوي شافوي إلا أن هذا يُعقد حل المسألة (لماذا ؟) .

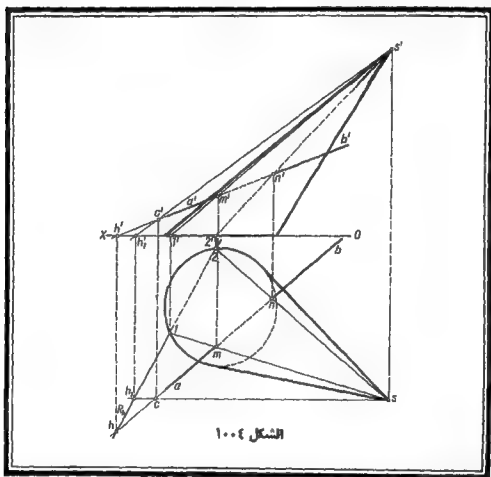
• المثال ٣٢٥ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل ١٠٠٣) .

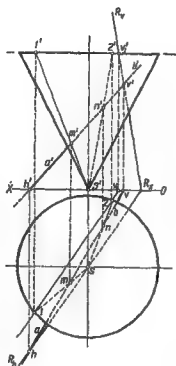
الحل : نضم المستقيم AB في مستوي جنبي R فيقطع سطح المخروط وفق دائرة . مكان تقاطع الماسقط الجنبية للدائرة الناتجة والمستقيم المفروض نجد الماسقط الجنبية $(m''), (n'')$ للتقاط المنشودة وبمعرفة نجد ماسقطها الأفقية والشافوية على ماسقط المستقيم $(ab, a'b')$ الموافقة .



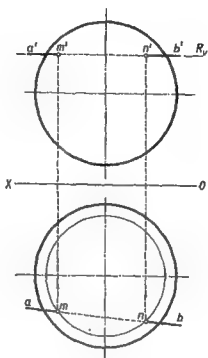
● المثال ٢٢٥ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط المائل (الشكل ١٠٠٤) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R المار من ذروة المخروط . هذا المستوي (المستقيم المفروض AB والنقطة S) يقطع سطح المخروط وفق مستقيمين مولدين .

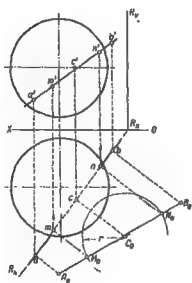




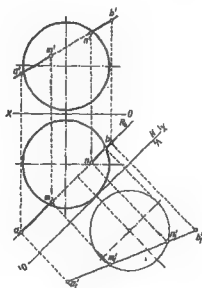
الشكل ١٠٠٥



الشكل ١٠٠٦



الشكل ١٠٠٧



الشكل ١٠٠٨

لتعيين هذين المولدين نقوم بما يلي : نعين المستوي المفروض بالمستقيم AB والنقطة S بمستيمين متقاطعين AB, SC (النقطة C اختيارية على المستقيم AB) .
نعين الآثار الأفقية (h_1, h'_1) و (h, h') للمستقيمتين $(ab, a'b')$ و $(sc, s'c')$ ونغور من النقطتين h, h_1 الآثار الأفقية (R_h) للمستوي $[$ الأثر الشاقولي للمستوي لا يلزم لحل هذه المسألة $($ لماذا ؟ $)$. يقطع المستوي R قاعدة الخروط وفق الوتر $(12, 1'2')$ كما يقطع سطح الخروط وفق المستيمين المولدين (s_1, s'_1) و (s_2, s'_2) . مكان تقاطع المساط الشاقولية لهذه المولدات مع المسقط الشاقولي $(a'b')$ للمستقيم المفروض نجد المساط الشاقولية $(n'), (m')$ لتقاطعات المنشودة وبمعرفة نجد التقاطعين m, n على المستقيم ab .

[إن ضم المستقيم AB في مستوي شاقولي أو أمامي يعقد حل المسألة (لماذا؟) .]

ملاحظة : في الحالة الخاصة (متى ؟) من الأفضل إعطاء المستوي المساعد المار من المستقيم AB والنقطة S بمستيمين متقاطعين في النقطة S .

● المثال ٣٢٧ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الخروط (الشكل ١٠٠٥) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R المار من ذروة الخروط S .
نعين آثار $(h, h'), (v, v')$ للمستقيم $(ab, a'b')$ ونرسم آثار المستوي : الأفقية (R_h) - من النقطتين h, s والشاقولي (R_v) من النقطتين v, v' . نعين خط تقاطع المستوي R مع مستوي قاعدة الخروط . المستوي R يقطع قاعدة الخروط وفق الوتر $(12, 1'2')$ وسطحه وفق المولدات (s_2, s'_2) و (s_1, s'_1) . مكان تقاطع المساط الشاقولية لهذه المولدات والمسقط الشاقولي $(a'b')$ للمستقيم المفروض

نجد الماقل الشاقولية (n') و (m') لتقاط المنشودة . بمعرفة m',n' نعين النقطتين m,n على المستقيم ab .

● المثال ٢٢٨ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الكرة (الشكل ١٠٠٦) .

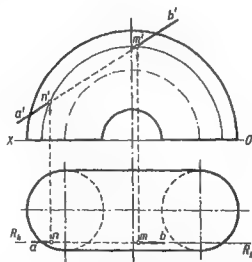
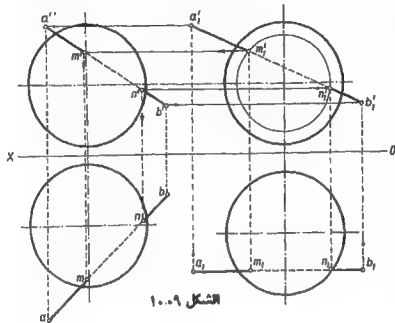
الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي H فيقطع سطح الكرة وفق دائرة . مكان تقاطع الماقل الأتية للدائرة الحاصلة والمستقيم المفروض نجد الماقل الأتية (m), (n) لتقاط المنشودة وبمعرفتها نجد النقطتين m',n' على المستقيم $a'b'$.

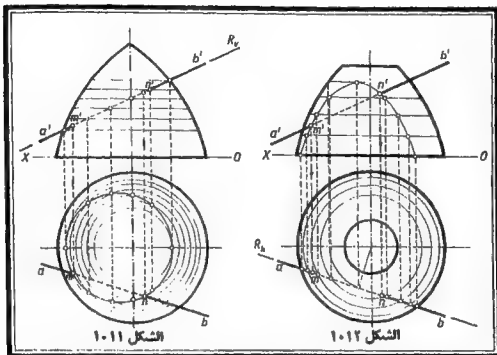
● المثال ٢٢٩ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الكرة .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ١٠٠٧) . نضم المستقيم AB في المستوي الشاقولي R فيقطع سطح الكرة وفق دائرة نصف قطرها r ومركزها في النقطة ($c;c'$)

حتى نتجنب رسم المسقط الشاقولي لخط التقاطع الذي هو بشكل قطع ناقص نطبق المستوي R على المستوي H ونعين في هذه الوضعية الدائرة والمستقيم المفروض ومكان تقاطعها نجد النقطتين M_0, N_0 ومنها نجد النقاط المنشودة (m,m'), (n,n') .

٢ - طريقة تبديل مستويات الاسقاط (الشكل ١٠٠٨) . نستبدل مثلاً مستوي الاسقاط الشاقولي بمستوي جديد (V_1) يوازي المستقيم المفروض . نضم المستقيم ($ab,a'b'$) في المستوي R الموازي للمستوي V_1 فيقطع الكرة وفق دائرة . مكان تقاطع الماقل الشاقولية للمستقيم والدائرة نجد النقطتين m_1',n_1' ومنها نجد نقاط المنشودة (n,n') و (m,m') .





٣- طريقة الانتقال (الشكل ١٠٠٩) . ننقل المجموعة المفروضة بصورة موازية مثلاً لمستوي الاسقاط الأفقي حتى يصبح المستقيم المفروض موازياً للمستوي V . نضم المستقيم $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ في المستوي R الموازي للمستوي V فيقطع سطح الكرة وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الشاقولية للدائرة والمستقيم نجد النقطتين m'_1, n'_1 ومنها بإنشاء عكسي نعين النقاط m', n' على المستقيم $a'b'$ وبالتالي m, n على المستقيم ab . النقاط $(m, m'), (n, n')$ هي النقاط المنشودة .

● المثال ٢٣٠ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الحلقة (الشكل ١٠١٠) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي V فيقطع سطح الحلقة وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الشاقولية للدائرة والمستقيم المفروض نجد

المساطر الشاقولية $(m'), (n')$ للنقاط المنشودة وبمعرفتها نجد المساطر الأفقية m, n على المستقيم ab .

(يمكن أن نضم المستقيم AB في مستوي أمامي، إلا أن هذا يُعقد كثيرًا حل المسألة) .

● المثال ٣٣١ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع الطح الدوراني المفروض (الشكل ١٠١١) .

الحل : نضم المستقيم AB في مستوي أمامي R ونعين مساطر خط التقاطع .
مكان تقاطع المساطر الأفقية لهذا الخط والمستقيم المفروض نجد النقاط m, n ومنها m', n' على المستقيم $a'b'$.

على الشكل ١٠١٢ نين حل المسألة بضم المستقيم في مستوي شاقولي R .

● المثال ٣٣٢ : لدينا النقطة S والمستقيم AB . أنشئ من النقطة S المستقيمتين التي تميل على المستوي H بزاوية مفروضة φ وتقطع المستقيم AB (الشكل ١٠١٣) .

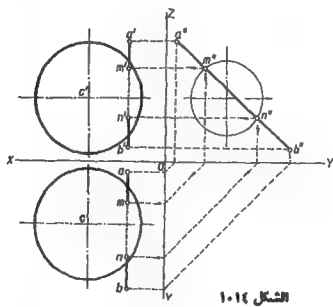
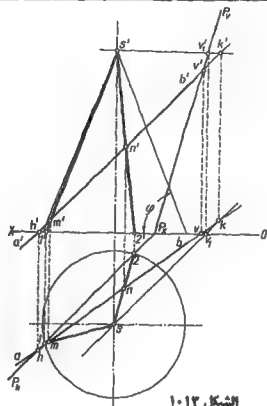
الحل : اهل الهندسي في الفراغ للمستقيمتين التي تمر من النقطة S وتميل على المستوي H بزاوية مفروضة φ هو سطح مخروطي دائري قائم ذروته في النقطة S ومولداته تشكل مع المستوي H نفس الزاوية φ . المستقيمت المنشودة هي مولدات المخروط التي تمر من النقاط $(m, m'), (n, n')$ تقاطع سطح المخروط مع المستقيم المفروض (الإنشاء واضح من الرسم) .

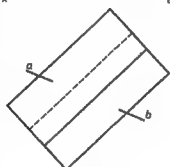
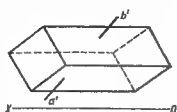
● المثال ٣٣٣ : لدينا النقطة C والمستقيم AB . عين على المستقيم AB النقاط التي تبعد عن النقطة C مسافة قدرها 15 mm (الشكل ١٠١٤) .

الحل : المحل المنتمي في الفراغ للنقاط التي تبعد عن النقطة C مسافة 15 mm هو سطح كرة نصف قطرها 15 mm ومركزها في النقطة C . النقاط المنشودة هي النقاط (n, n') , (m, m') تقاطع سطح الكرة مع المستقيم المقروص (الإنشاء واضح من الرسم) .

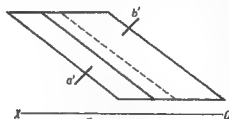
مسائل

٤٨٩ - أوجد نقاط تقاطع المستقيم مع سطح الجسم المقروص (المنشور ، الهرم ، الاسطوانة ، المخروط ، الكرة) (الأشكال ١٠١٥ - ١٠٣٤) .

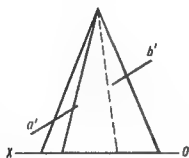




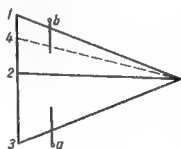
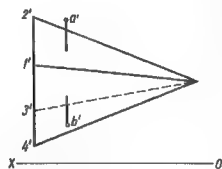
الشكل ١٠١٥



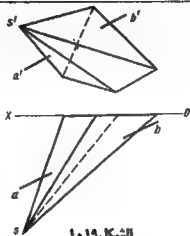
الشكل ١٠١٦



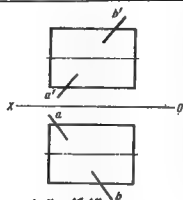
الشكل ١٠١٧



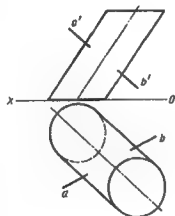
الشكل ١٠١٨



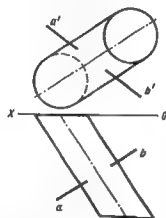
الشكل ١٠١٩



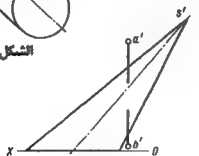
الشكل ١٠٢٠



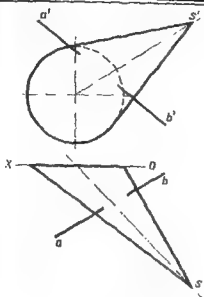
الشكل ١٠٢١



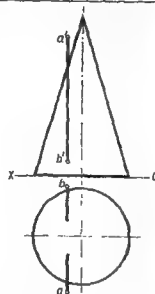
الشكل ١٠٢٢



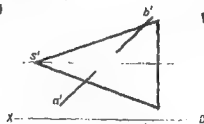
الشكل ١٠٢٣



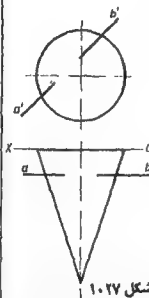
الشكل ١٠٢٤



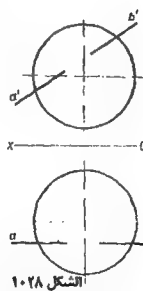
الشكل ١٠٢٥



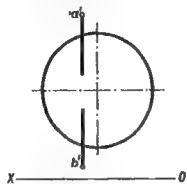
الشكل ١٠٢٦



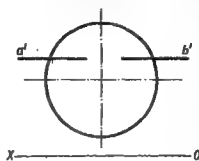
الشكل ١٠٢٧



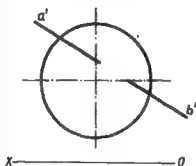
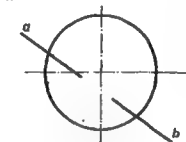
الشكل ١٠٢٨



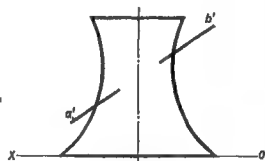
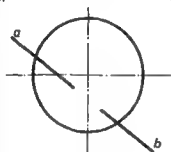
الشكل ١٠٢٩



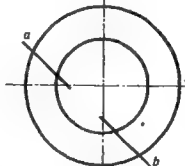
الشكل ١٠٣٠

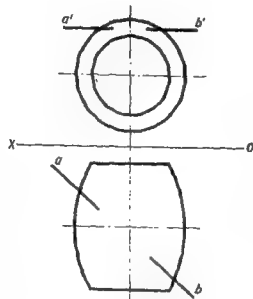


الشكل ١٠٣١

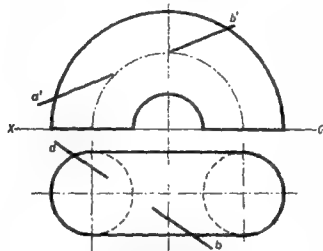


الشكل ١٠٣٢





الشكل ١٠٣٣



الشكل ١٠٣٤

البحث السادس والعشرون

تقاطع السطوح

لإنشاء خط تقاطع سطحين علينا أن نعين مجموعة نقاط تنتمي بأن واحد لكل من السطحين ثم نصل النقاط حسب تابع معين .
خط التقاطع يمكن أن يكون :

- ١ - منحنى فراغي - في حالة تقاطع سطحين منحنيين أو سطح منحنى مع كثير الوجوه .
- ٢ - خط منكسر فراغي - في حالة تقاطع كثيري الوجوه .

أحياناً خط تقاطع سطحين يمكن أن يكون مستويًا - خط مستقيم ، دائرة ، قطع ناقص... الخ .
لتعيين نقطة ما من خط التقاطع نقوم بما يلي :

- ١ - نستخدم مستويًا مساعدًا .
 - ٢ - نعين خط تقاطع هذا المستوي مع كل من السطحين .
 - ٣ - مكان تقاطع الخطين الحاصلين يعين لنا النقاط المطلوبة .
- وبالتدريج باستعمال مجموعة مستويات مساعدة يمكننا تعيين العدد الكافي من النقاط .
- ملاحظة : علينا اختيار المستوي المساعد بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع

كل من السطحين على مستويات الاسقاط بشكل خطوط بسيطة - مستقيم
أو دائرة .

يمكن تعيين خط تقاطع كثيري الوجوه (B و A) بالشكل التالي :

١ - نعين نقاط تقاطع أحرف كثير الوجوه الأول (A) مع وجوه كثير
الوجوه الثاني (B) .

٢ - نعين نقاط تقاطع أحرف كثير الوجوه الثاني (B) مع وجوه كثير
الوجوه الأول (A) .

٣ - نصل النقاط الخاصة على التابع بخطوط مستقيمة .

ملاحظات : من الضروري أن توصل ببعضها فقط تلك النقاط التي تقع على
نفس الوجه من كل من كثيري الوجوه .

إذا كان أحد السطحين المتقاطعين ذو مولدات مستقيمة فإن خط التقاطع يمكن
تعيينه برسم مجموعة مولدات على هذا السطح وتعيين نقاط تقاطعها مع السطح الآخر
نصل هذه النقاط بخط منحنى .

أحياناً لتعيين نقاط خط تقاطع سطحين منحنيين من الأسهل استخدام لامتوي
بل سطح اسطواني أو مخروطي أو كروي .

إن أي سطح دوراني يقطع سطح كرة وفق دائرة إذا كان مركز الكرة يقع
على محور الدوران .

أمثلة

● المثال ٣٣٤ : أوجد خط تقاطع الاسطوانتين (الشكل ١٠٣٥) .

الحل : نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي H فيقطع سطح الاسطوانة الشاقولية وفق دائرة أما سطح الاسطوانة الأفقية فوق المولدات . مكان تقاطع هذه الخطوط نجد التقاطعين $(2,2')$ و $(1,1')$. بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى (انظر الرسم) .

يرصل هذه النقاط بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

ملاحظة : يمكننا استخدام مستوي مساعد موازي للمستوي V .

● المثال ٣٣٥ : أوجد خط تقاطع الاسطوانتين (الشكل ١٠٣٦) .

الحل : نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي V فيقطع سطح الاسطوانتين وفق المولدات . مكان تقاطع هذه المولدات نجد التقاطعين $(2,2')$ و $(1,1')$. بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة A, B, C, D, E, F بواسطة المستويات المساعدة S_1, S_2, S_3, S_4 (انظر الرسم) . يرصل جميع النقاط احاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

ملاحظة : عند انشاء خط التقاطع علينا أن نوجه انتباهنا لتعيين النقاط المميزة لهذا الخط .

● المثال ٣٣٦ : أوجد خط تقاطع الاسطوانتين وارسم انفراد سطوحها الجانبية (الشكل ١٠٣٧) .

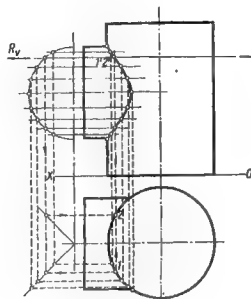
الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة المائلة إلى اثني عشر جزء متساوٍ ثم نرمس من نقاط التقسيم هذه المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع سطح الاسطوانة الشاقولية .
 نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي V ومارأً من محور الاسطوانة الشاقولية فيقطع سطحي الاسطوانتين وفق المولدات ، مكان تقاطعها يعين لنا النقطتين المميزتين $(a,a), (b,b')$. بوصل جميع النقاط الحاصلة بنحط منحن نجد خط التقاطع المنشود .
 انفردات الطوح الجانبية للإسطوانتين ترمم وفق القاعدة العامة (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٣٧ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط (الشكل ١٠٣٨) .
الحل : نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي W فيقطع سطح المخروط وفق دائرة وسطح الاسطوانة وفق المولدات ، مكان تقاطعها نجد النقطتين $(2,2')$ و $(1,1')$.

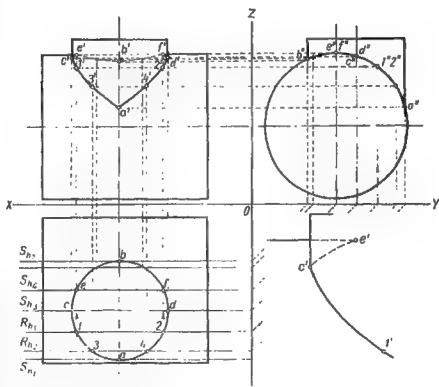
بصورة مماثلة نعين مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة A,B,C,D,E,F بواسطة المستويات المساعدة P,Q,S (على الرسم بدون رمز) . بوصل جميع النقاط الحاصلة بنحط منحن نجد خط التقاطع المنشود .
 استعمال المستوي المساعد الموازي للمستوي H أو V يعقد المسألة للسهولة (لماذا ؟) .

● **المثال ٣٣٨ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط وارسم انفردات سطوحها الجانبية (الشكل ١٠٣٩) .

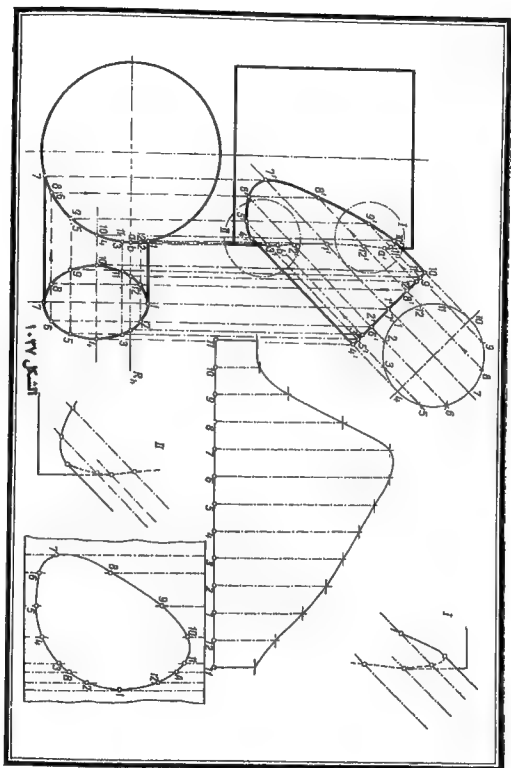
الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة إلى اثني عشر جزء متساوٍ ونرمس من نقاط التقسيم هذه المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع سطح المخروط . بوصل هذه النقاط

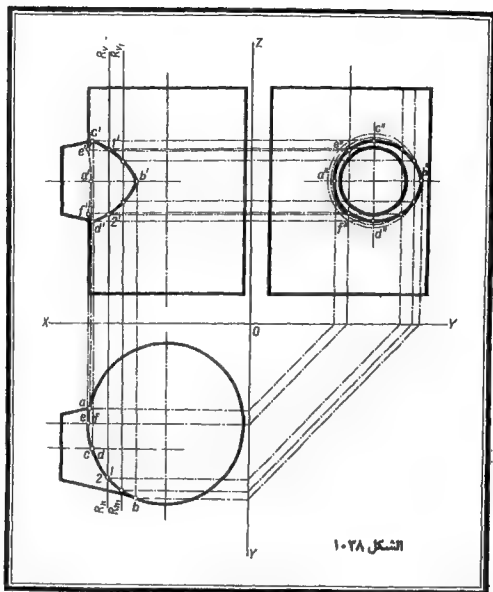


الشكل ١٠٢٥



الشكل ١٠٣٦





نخط منحني نجد خط التقاطع المنشود .

انفرادات السطوح الجانبية للإسطوانة والمخروط ترسم وفق القاعدة العامة
(الإنشاء واضح من الرسم) .

● المثال ٣٣٩ : أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط (الشكل ١٠٤٠) .

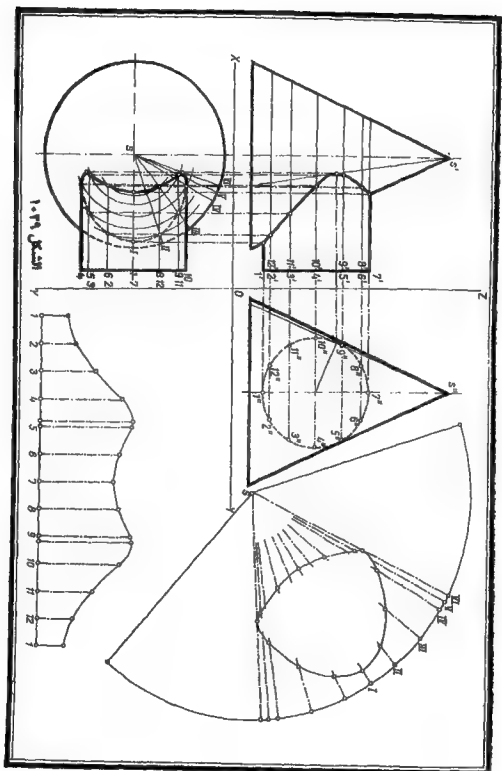
الحل : ننشئ على سطح المخروط إثني عشر مولداً ونعين نقاط تقاطعها مع سطح الاسطوانة ثم نعين النقاط المميزة A,B . بوصل جميع النقاط الخاصة بنقط منحني نجد خط التقاطع المنشود (الإنشاء واضح من الرسم) .

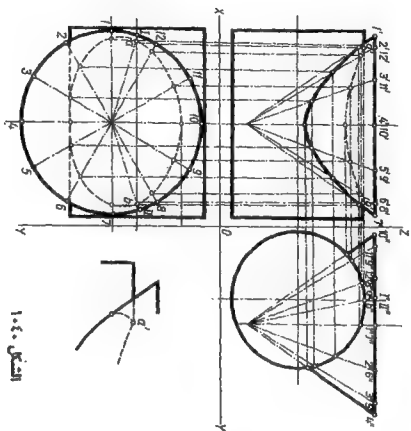
● المثال ٣٤٠ : أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط مستخدماً سطوحاً كروية (الشكل ١٠٤١) .

الحل : نأخذ النقطة $(c;c')$ تقاطع محور الإسطوانة مع محور المخروط كمركز للسطوح الكروية المساعدة . نرسم من النقطة $(c;c')$ كرة ذات نصف قطر اختياري R فتتقاطع كل من سطح الاسطوانة والمخروط وفق دائرة مساقطها الشاقولية خطوط مستقيمة أما الأتقية فبشكل قطوع ناقصة (حل المسألة لا تلزمنا المساقط الأتقية لذا فإننا لا نرسم هذه القطوع الناقصة) . مكان تقاطع الخطوط المستقيمة هذه نجد المساقط الشاقولية $(2'),(1')$ لهذه النقاط . ومنها باستعمال مولدات مساعدة (أو دوائر) نجد مساقطها الأتقية $(2),(1)$. بصورة مماثلة وبتشوير نصف قطر الكرة نجد بقية النقاط وبوصلها بنقط منحني نجد خط التقاطع المنشود .

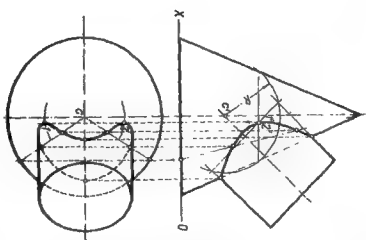
يمكننا كذلك إيجاد خط التقاطع باستخدام مستويات مساعدة لهذا لتجنب إنشاء خطوط منحنية بواسطة الشايلون (ما هي ؟) نأخذ هذه المستويات مارة من ذروة المخروط وموازية لمحور الاسطوانة . هذه الطريقة تعقد حل المسألة .

ملاحظة ١ : - إذا كانت محاور السطوح المتقاطعة لا تتوضع موازية لأحد مستويات الإسقاط فإن من المنطقي والمعتقول نقلها إلى هذه الوضعية (لماذا ؟) .





التقاطع ١٠٤٠

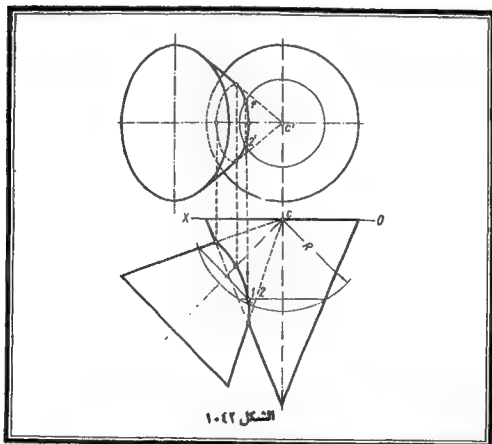


التقاطع ١٠٤١

٢- إذا كان محور الاسطوانة لا يقطع محور المخروط نستخدم المستويات المساعدة المذكورة أعلاه .

٣- إذا لم تكن الاسطوانة والمخروط سطوح دورانية فإننا كذلك نستخدم المستويات المساعدة الآتية الذكر دون أن نأخذ بعين الاعتبار وضع محاورها .

● المثال ٣٤١ : أوجد خط تقاطع المخروطين (الشكل ١٠٤٢) .



الحل : بما أن محوري الخروطين يتقاطعان في النقطة (c, c') فإننا نأخذ هذه النقطة كمركز للسطوح الكروية المساعدة . نرمس من النقطة (c, c') كرة ذات نصف قطر اختياري H فتقطع كل من السطحين المفروضين وفق دائرة مسافطها الأفقية بشكل خطوط مستقيمة أما الشاقولية فيشكل قطع ناقص (المسافط الشاقولية لا تلازم حل المسألة لذا فإننا لا نرمس القطوع الناقصة) . مكان تقاطع هذه الخطوط المستقيمة نجد المسافط الأفقية $(1), (2)$ للتقاط ومنها باستخدام مولدات مساعدة (أودوائر) نجد مسافطها الشاقولية $(1'), (2')$. بصورة مماثلة وبتغيير نصف قطر الكرة نجد بقية النقاط التي يوصلها بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

يمكن تعيين خط التقاطع أيضاً باستخدام المستويات المساعدة . لتجنب إنشاء خطوط منغنية بواسطة الشابلون (ما هي ؟) نأخذ هذه المستويات مارة من ذروفي الخروطين . إن هذه الطريقة تعقد كثيراً حل المسألة .

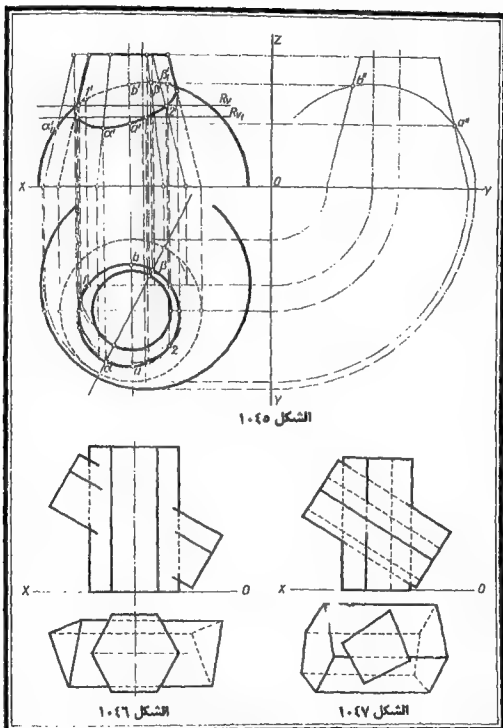
ملاحظة : ١ - إذا لم يتقاطع محور الخروطين نستعمل المستويات المساعدة المذكورة أعلاه .

٢ - إذا لم يكن سطح الخروطين دورانيين نستعمل المستويات المساعدة المذكورة أعلاه بغض النظر عن وضع المحاور .

● **المثال ٢٤٢ :** أوجد خط تقاطع الإسطوانة مع الكرة (الشكل ١٠٤٣) .

الحل : نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي H فيقطع كل من السطحين وفق دائرة مكان تقاطعها نجد $(1, 1'), (2, 2')$. بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة : الدنيا (α, α') والعليا $(\beta, \beta'), (b, b'), (a, a')$ (انظر الرسم) . يوصل جميع النقاط الخاصة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

يمكننا أيضاً استخدام مستوي مساعد موازي للمستوي V .



● المثال ٢٤٣ : أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع الكرة (الشكل ١٠٤٤) .

الحل : نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي V فيقطع سطح الكرة وفق دائرة وسط سطح الاسطوانة وفق المولدات ، مكان تقاطعها نجد النقطتين $(2,2')$ و $(1,1')$. بصورة مماثلة نعين مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة A, B, C, D, E, F (انظر الرسم) .

النقطة الدنيا (α, α') والنقطة العليا (β, β') تعينان مكان تقاطع سطح الكرة مع مولدات الاسطوانة المتوضعة في المستوي الشاقولي S المار من محور الاسطوانة ومركز الكرة . يوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحني نجد خط التقاطع المنشود .

● المثال ٢٤٤ : أوجد خط تقاطع المخروط مع الكرة (الشكل ١٠٤٥) .

الحل : نستخدم مستويًا مساعدًا R موازيًا للمستوي H فيقطع السطحين المفروضين وفق دائرتين مكان تقاطعها نجد النقطتين $(2,2')$ و $(1,1')$. بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى (انظر الرسم) . لتعين النقطتين (α, α') و (β, β') ندور السطوح المفروضة حول محور الكرة العمودي على المستوي H بزاوية مناسبة φ (انظر الرسم) . ونرمز المسقط الشاقولي للمخروط في الوضعية الجديدة (المسقط الشاقولي للكرة لا يتغير) . بعد تعيين (β_1, β'_1) و (α_1, α'_1) ندور المجموعة في الاتجاه المعاكس فنجد مساقط النقطتين المنشودتين (β, β') و (α, α') ، ثم نعين النقطتين $(1,1')$ و $(2,2')$ لتقاطع مولدي المخروط الجنبيين مع سطح الكرة (انظر الرسم) .

يوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحني نجد خط التقاطع المنشود .

يمكن تعيين النقطتين (β, β') و (α, α') كذلك باستخدام طريقة تبديل مستويات الإسقاط (كيف ؟) . كما يمكن تعيين النقطتين (b, b') و (a, a') دون استخدام مستوي الإسقاط الجنبى (كيف ؟) .

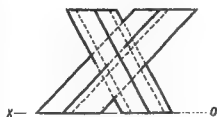
مسائل

٤٩٠ - لدينا سطحان (انظر في الأسفل) . انشئ خط تقاطعها وانفرداها مع
لمبار خطوط التقاطع على هذه الإنفرادات :

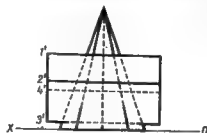
- موشور مع موشور (الشكل ١٠٤٦ - ١٠٤٨)
- موشور مع هرم (الشكل ١٠٤٩ - ١٠٥١)
- هرم مع هرم (الشكل ١٠٥٢ - ١٠٥٤)
- موشور مع اسطوانة (الشكل ١٠٥٥ - ١٠٥٧)
- موشور مع كرة (الشكل ١٠٥٨ ، ١٠٥٩)
- موشور مع مخروط (الشكل ١٠٦٠ - ١٠٦٢)
- هرم مع اسطوانة (الشكل ١٠٦٣ ، ١٠٦٤)
- هرم مع كرة (الشكل ١٠٦٥)
- هرم مع مخروط (الشكل ١٠٦٦)
- اسطوانة مع اسطوانة (الشكل ١٠٦٧ - ١٠٨٠)
- اسطوانة مع مخروط (الشكل ١٠٨١ - ١٠٩٤)
- اسطوانة مع كرة (الشكل ١٠٩٥ - ١١٠٠)
- مخروط مع كرة (الشكل ١١٠١ - ١١٠٧)
- مخروط مع مخروط (الشكل ١١٠٨ - ١١١٠)

٤٩١ - أنشئ مساقط خط تقاطع كرة مع اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها

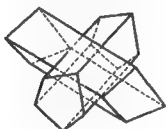
$r = 20 \text{ mm}$ ومحورها ينطبق مع مستقيم مفروض أما مركز قاعدتها العلوية فينطبق
مع النقطة (c, c') (الشكل a ١١٠٠) .



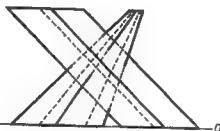
الشكل ١٠٤٨



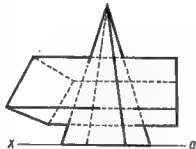
الشكل ١٠٤٩



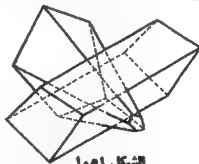
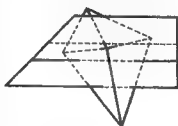
الشكل ١٠٥٠



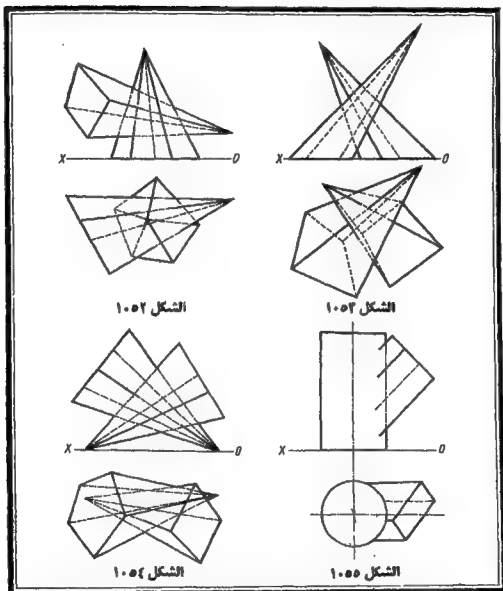
الشكل ١٠٥١



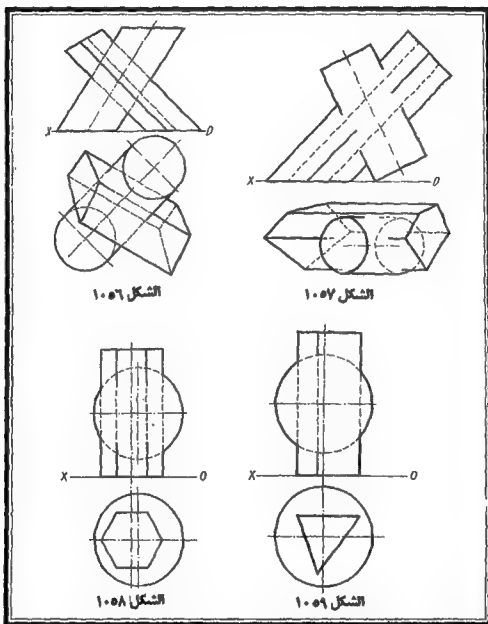
الشكل ١٠٥٢



الشكل ١٠٥٤



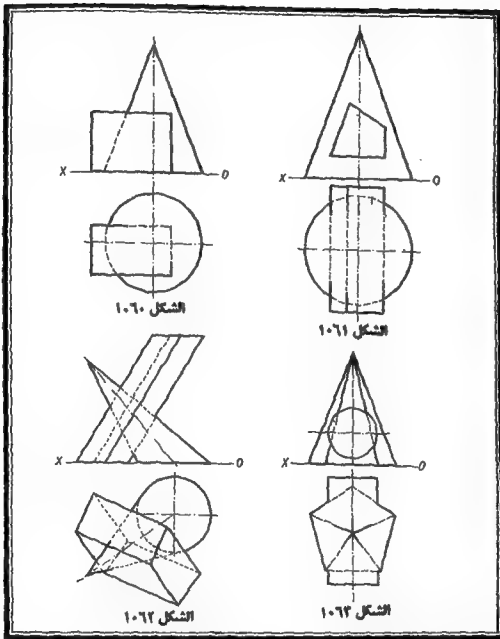
- ٤٩٢ - أنشئ مساقط خط تقاطع كرة مع مخروط دائري قائم ذروته في النقطة S ،
 إذا كان محور المخروط ينطبق مع مستقيم مفروض وزاوية رأسه تساوي 60° .
- ٤٩٣ - باستخدام السطوح الكروية المساعدة أنشئ مساقط خط التقاطع :



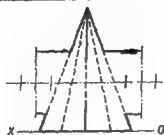
١ - لاسطوانتين (الشكل ١٠٦٧ ، ١٠٦٩ ، ١٠٧٢ ، ١٠٧٤) .

٢ - لاسطوانة مع مخروط (الشكل ١٠٧٩ ، ١٠٨١ ، ١٠٨٣ ، ١٠٨٦ ، ١٠٨٧ ، ١٠٩٠ ، ١٠٩١) .

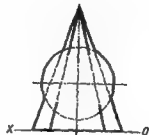
١٠٩١ .



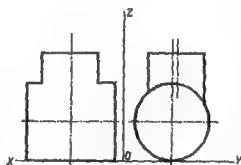
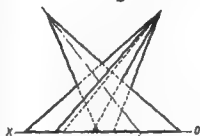
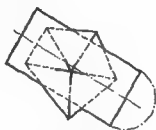
٤٩٤ - أنشء مساقط خط تقاطع مخروطين باستخدام السطوح الكروية المساعدة
(الشكل ١١٠٨، ١١٠٩، ١١٠٨).



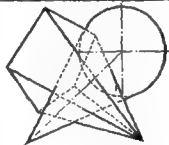
الشكل ١٠٦٤



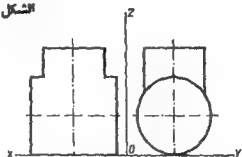
الشكل ١٠٦٥



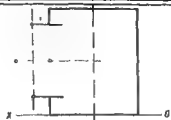
الشكل ١٠٦٧



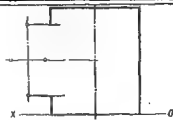
الشكل ١٠٦٦



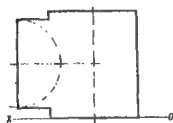
الشكل ١٠٦٨



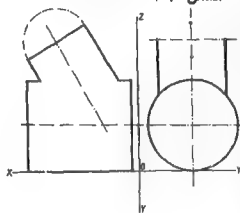
الشكل ١٠٦٩



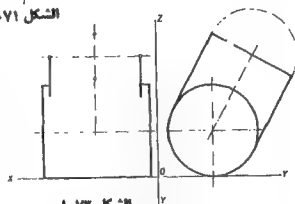
الشكل ١٠٧٠



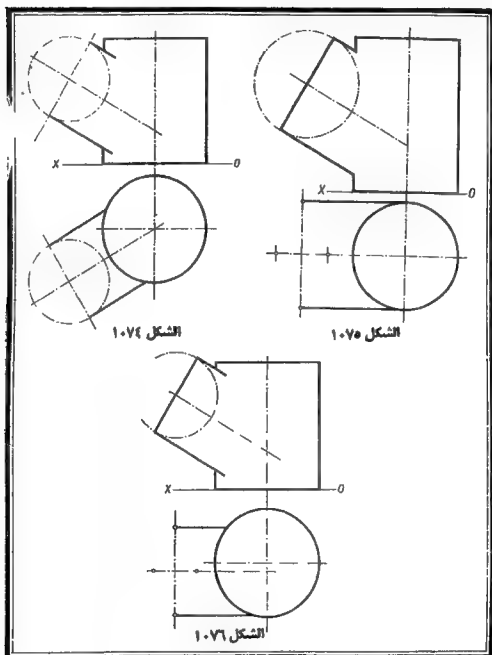
الشكل ١٠٧١

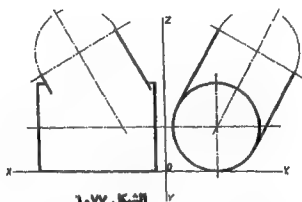


الشكل ١٠٧٢

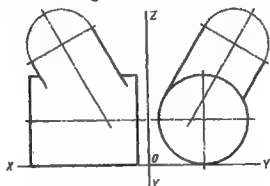


الشكل ١٠٧٣

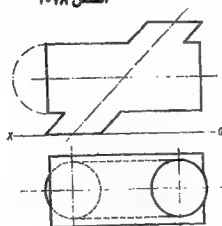




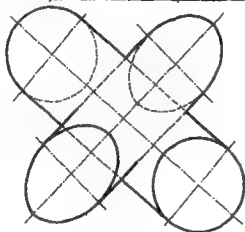
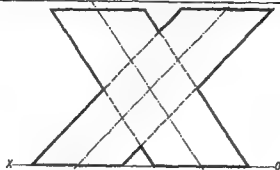
الشكل ١-٧٧



الشكل ١-٧٨



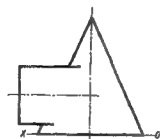
الشكل ١-٧٩



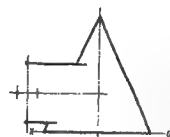
الشكل ١٠٨٠



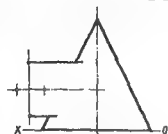
الشكل ١٠٨١



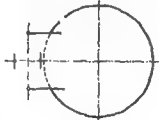
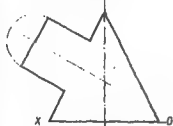
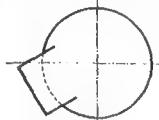
الشكل ١٠٨٢



الشكل ١٠٨٣



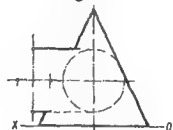
الشكل ١٠٨٤



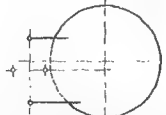
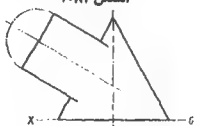
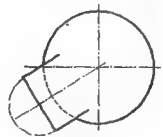
الشكل ١٠٨٦



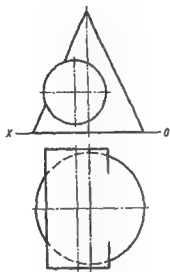
الشكل ١٠٨٥



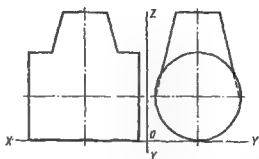
الشكل ١٠٨٧



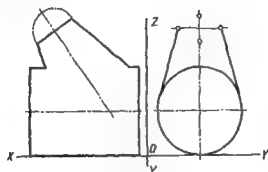
الشكل ١٠٨٨



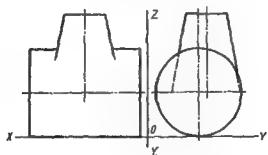
الشكل ١٠٨٩



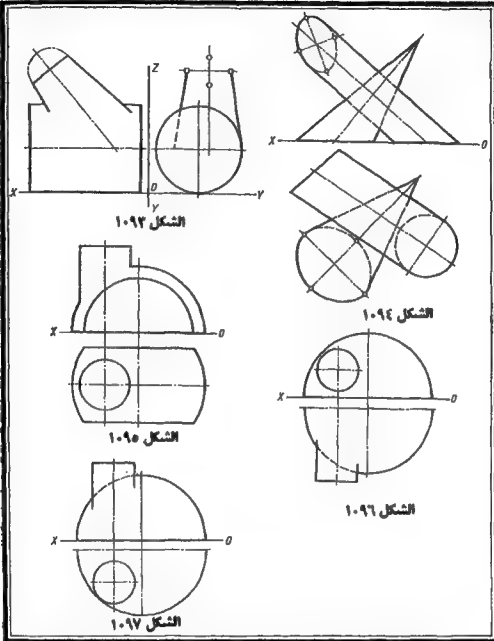
الشكل ١٠٩٠



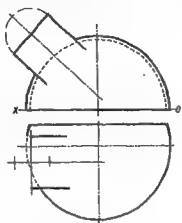
الشكل ١٠٩١



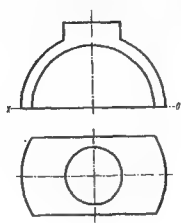
الشكل ١٠٩٢



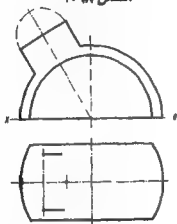
- ٤٩٥ - أنشئ مساقط خط تقاطع سطح حلقة مع اسطوانة (الشكل ١١١٢، ١١١١) .
- ٤٩٦ - أنشئ خط تقاطع سطح حلقة مع مخروط (الشكل ١١١٣) .
- ٤٩٧ - أنشئ مساقط خط تقاطع سطح حلقة مع اسطوانة تنتهي بكرة (الشكل ١١١٤) .



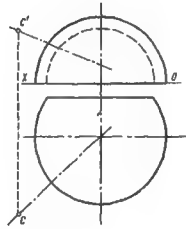
الشكل ١٠٩٨



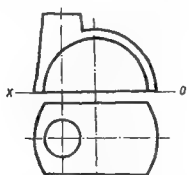
الشكل ١٠٩٩



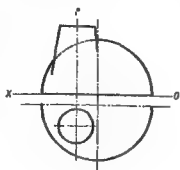
الشكل ١١٠٠



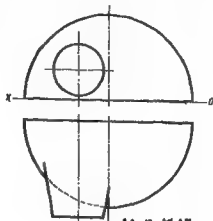
الشكل ١١٠٠



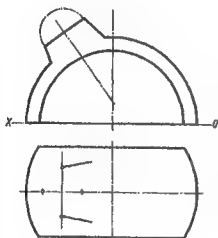
الشكل ١١٠١



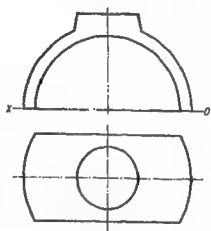
الشكل ١١٠٢



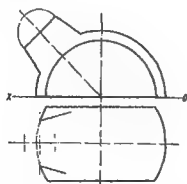
الشكل ١١٠٣



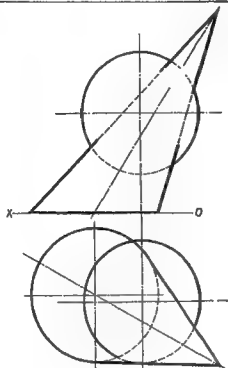
الشكل ١١٠٤



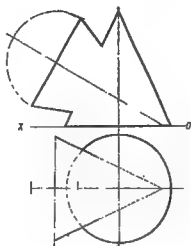
الشكل ١١٠٥



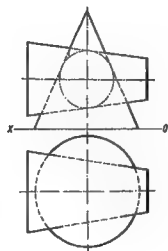
الشكل ١١٠٦



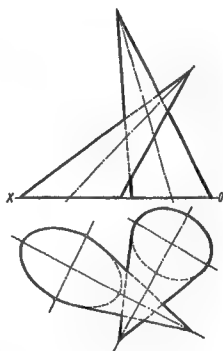
الشكل ١١٠٧



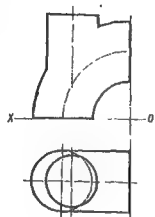
الشكل ١١٠٨



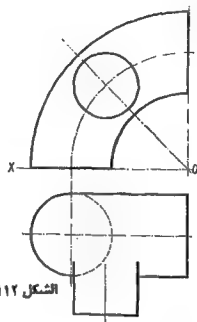
الشكل ١١٠٩



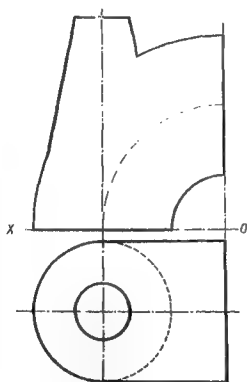
الشكل ١١١٠



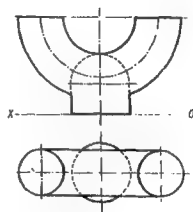
الشكل ١١١١



الشكل ١١١٢



الشكل ١١١٣



الشكل ١١١٤

البحث السابع والعشرون

مسائل مختلفة

(لجميع الفصول)

حل بطرق مختلفة كل من المسائل التالية أدناه :

- ٤٩٨ - أوجد نقطة تقاطع المستويات P, Q, R (الشكل ١١١٥، ١١١٦) .
- ٤٩٩ - أنشئ من النقطة A مستقيماً يوازي المستويين P, Q (الشكل ١١١٧) .
- ٥٠٠ - أنشئ من النقطة K مستقيماً موازياً للمستوي الشاقولي R والمستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ١١١٨) .
- ٥٠١ - أنشئ من النقطة K مستقيماً موازياً للمستوي الأمامي R والمستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين AB, CD (الشكل ١١١٩) .
- ٥٠٢ - أنشئ من النقطة K مستقيماً موازياً للمستوي P والمستوي المعطى بالمستقيمين المتقاطعين AB, AC (الشكل ١١٢٠) .
- ٥٠٣ - أنشئ من النقطة M مستقيماً موازياً للمستويين الأول المعطى بمستقيمين متقاطعين AB, CD والآخر بمستقيمين متوازيين EF, KL (الشكل ١١٢١) .
- ٥٠٤ - أنشئ في المستوي P ومن النقطة A مستقيماً موازياً للمستوي Q (الشكل ١١٢٢) .
- ٥٠٥ - أنشئ من النقطة K مستقيماً MN يقطع المستقيمين المفروضين AB, CD (الشكل ١١٢٣) .
- ٥٠٦ - أقطع المستقيمتين المفروضة AB, CD, EF بمستقيم ما MN (الشكل ١١٢٤) .

٥٠٧ - اقطع المستقيمين المفروضين AB, CD بمستقيم MN موازي للمستقيم EF (الشكل ١١٢٤) .

٥٠٨ - اقطع المستقيمين المفروضين AB, CD بالمستقيم MN الموازي لخط الأرض دون استخدام المستوي الجنبي (الشكل ١١٢٥) .

٥٠٩ - اقطع المستقيمين المفروضين AB, CD بمستقيم MN ميل على مستوي الإسقاط ميلاً واحداً (الشكل ١١٢٥) .

٥١٠ - اقطع المستقيمين المفروضين AB, CD بمستقيم يشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية قدرها 45° ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية قدرها 80° (الشكل ١١٢٥) .

٥١١ - اقطع المستقيمتين AB, AC, AD بالمستقيم AM الذي يشكل زوايا متساوية مع المستقيمتين المفروضة (الشكل ١١٢٦) .

٥١٢ - أنشئ من النقطة M مستقيماً KL يشكل مع المستقيمتين AB, CD, EF زوايا متساوية (الشكل ١١٢٧) .

٥١٣ - جِّز على المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن التقتين A, B من هذا المستوي (الشكل ١١٢٨) .

٥١٤ - أنشئ في المستوي P مثلثاً متساوي الساقين ABC خروته A على الأثر الأفقي للمستوي إذا علم المسقط الشاقولي للضلع BC (الشكل ١١٢٩) .

٥١٥ - أنشئ من النقطة M من المستقيم AB عموداً MN يقطع المستقيم CD (الشكل ١١٣٠) .

٥١٦ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تفلق قطعة دائرية نصف قطرها 20 mm واقعة في المستوي P (الشكل ١١٣١) .

٥١٧ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي P إذا علم المسقط الشاقولي للنقطة C - مركز الكرة (الشكل ١١٣٢) .

٥١٨ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة D إذا علم المسقط الأفقي للنقطة C مركز الكرة (الشكل ١١٣٣) .

٥١٩ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 30 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيمين التوازيين AB, DE إذا علم المسقط الشاقولي للنقطة C مركز الكرة (الشكل ١١٣٤) .

٥٢٠ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس مستوي التماس KLM إذا علم المسقط الأفقي للنقطة C مركز الكرة (الشكل ١١٣٥) .

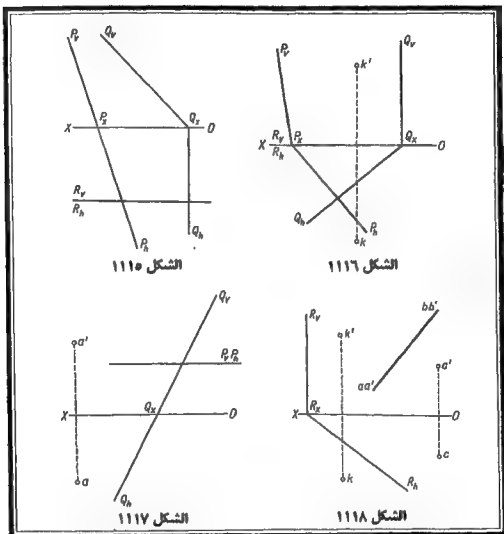
٥٢١ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي P بحيث يقع مركزها على المستقيم AB (الشكل ٤٦٦) .

٥٢٢ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة D بحيث يقع مركزها على المستقيم MN (الشكل ١١٣٦) .

٥٢٣ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيمين التوازيين AB, DE بحيث يقع مركزها على المستقيم MN (الشكل ١١٣٧) .

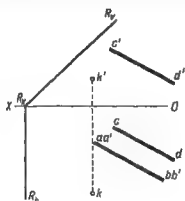
٥٢٤ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس مستوي التماس DEF بحيث يقع مركزها على المستقيم AB (الشكل ١١٣٨) .

٥٢٥ - أنشئ من النقطة K مستويًا Q عمودياً على المستوي P ويميل بصورة مائلة على مستوي الإسقاط (الشكل ٦٤٠ ، ٦٤١) .

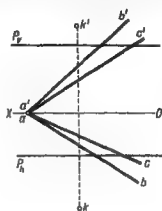


٥٢٦ - أنشئ من النقطة K مستويًا P مودبًا على المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C ويميل بصورة متجانسة على مستوي الإسقاط (الشكل ٦٤٢).

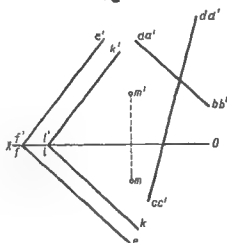
٥٢٧ - أنشئ من النقطة K مستويًا P مودبًا على المستوي المعطى بالمستقيمين



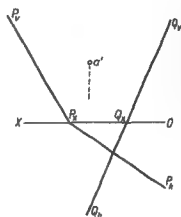
الشكل ١١١٩



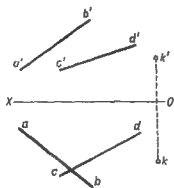
الشكل ١١٢٠



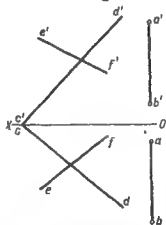
الشكل ١١٢١



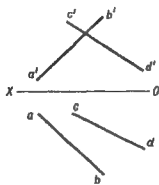
الشكل ١١٢٢



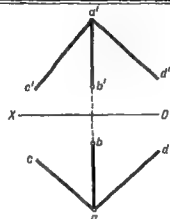
الشكل ١١٢٣



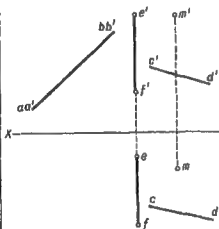
الشكل ١١٢٤



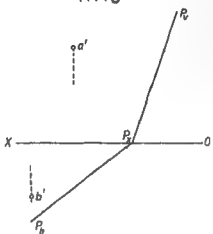
الشكل ١١٢٥



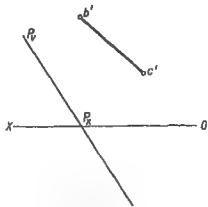
الشكل ١١٢٦



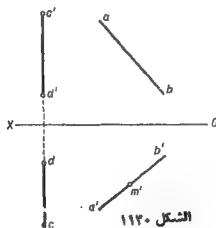
الشكل ١١٢٧



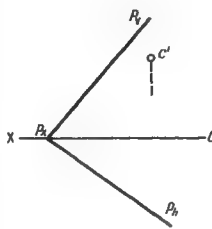
الشكل ١١٢٨



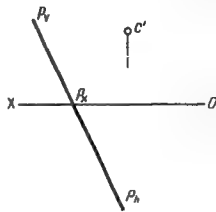
الشكل ١١٢٩



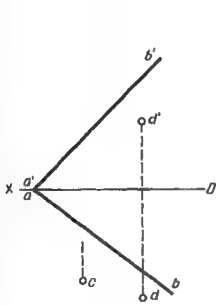
الشكل ١١٣٠



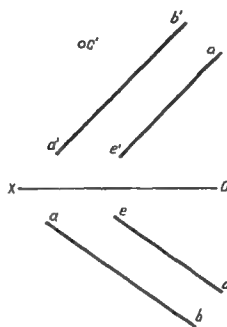
الشكل ١١٣١



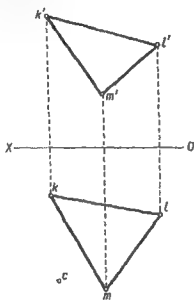
الشكل ١١٣٢



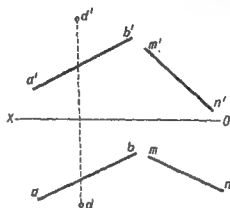
الشكل ١١٣٣



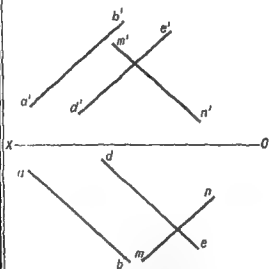
الشكل ١١٣٤



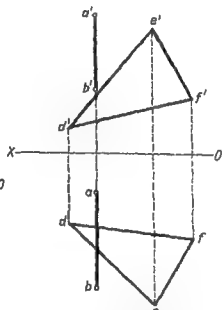
الشكل ١١٣٥



الشكل ١١٣٦

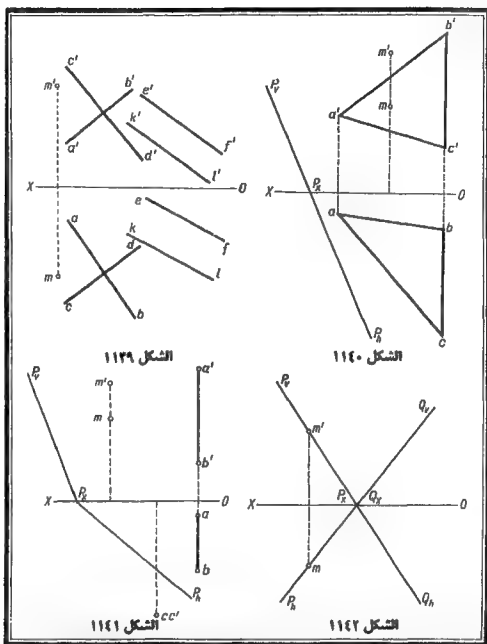


الشكل ١١٣٧



الشكل ١١٣٨

المتوازيين AB, CD ويميل بصورة متائلة على مستوي الإسقاط
(الشكل ٦١٣).



٥٢٨ - أنشئ من النقطة K مستويًا P عمودياً على مستويي المثلث ABC وميل
ملاً واحداً على مستويي الإسقاط (الشكل ١١٤١).

٥٢٩ - أنشئ من النقطة M مستويًا P عمودياً على المستويين المعطيين الأول
بالمستقيمين المتقاطعين AB, CD والآخر بالمستقيمين المتوازيين EF, KL
(الشكل ١١٣٩).

٥٣٠ - أنشئ من النقطة M مستويًا عمودياً على المستوي P وعلى مستوي التلث ABC (الشكل ١١٤٠) .

٥٣١ - أنشئ من النقطة M مستويًا عمودياً على المستوي P وعلى المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ١١٤١) .

٥٣٢ - أنشئ من النقطة M مستويًا عمودياً على المستويين P, Q (الشكل ١١٤٢) .

٥٣٣ - أنشئ من النقطة M مستويًا Q عمودياً على المستوي P وعلى المستوي المفروض بالمستقيمين المتوازيين AB, CD (الشكل ١١٤٣) .

٥٣٤ - أنشئ المحل الهندسي في الفراغ للتقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين AB, CD (الشكل ٥٩٩) .

٥٣٥ - أنشئ في المستوي P المحل الهندسي للتقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين AB, CD (الشكل ٦٠٢) .

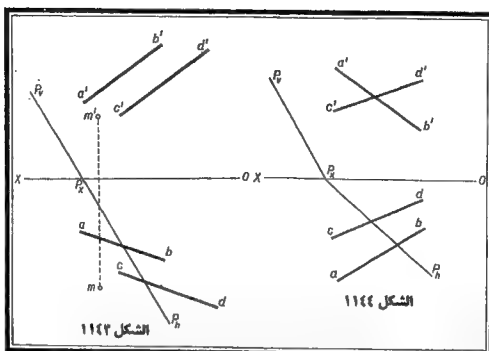
٥٣٦ - عين على المستقيم MN النقطة K المتساوية البعد عن المستقيمين المتوازيين AB, CD (الشكل ٦٠٧) .

٥٣٧ - أنشئ المستقيم MN العمودي على المستوي P والقاطع للمستقيمين AB, CD (الشكل ١١٤٤) .

٥٣٨ - اقطع المستقيمين المفروضين AB, CD بمستقيم MN عمودي عليها (الشكل ٥٧٨) .

٥٣٩ - أنشئ المستوي P المتساوي البعد عن مستقيمين متباينين AB, CD (الشكل ٥٧٨) .

٥٤٠ - أنشئ المحل الهندسي في الفراغ للتقاط المتساوية البعد عن أقرب نقطتين



بين مستقيمين اختياريين AB, CD (الشكل ٥٧٨) .

٥٤١ - أوجد على المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن أقرب

نقطتين بين مستقيمين اختياريين AB, CD (الشكل ١١٤٤) .

٥٤٢ - أوجد على المستقيم EF نقطة متساوية البعد عن أقرب نقطتين بين مستقيمين

اختياريين AB, CD (الشكل ١١٢٤) .

٥٤٣ - أنشئ في المستوي P مستقيماً عمودياً على المستقيم AB وماراً من نقطة

تقاطعه مع المستوي (الشكل ٥٥٦) .

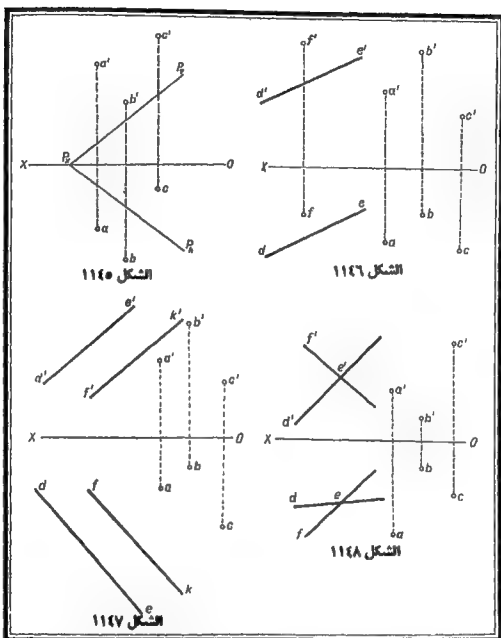
٥٤٤ - أنشئ في مستوي المثلث ABC مستقيماً عمودياً على المستقيم MN

وماراً من نقطة تقاطعه مع المستوي (الشكل ٦٩٨) .

٥٤٥ - أنشئ في المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين AB, CD مستقيماً

عمودياً على المستقيم MN وماراً من نقطة تقاطعه مع المستوي

(الشكل ٦٠٧) .



٥٤٦ - أنشئه في المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C مستقيماً عمودياً على المستقيم MN وماراً من نقطة تقاطعه مع المستوي (الشكل ٦٠٦).

٥٤٧ - عين على المستوي P نقطة متساوية البعد عن النقاط الخارجية الثلاث

A, B, C (الشكل ١١٤٥) :

٥٤٨ - عين على المستوي المعطى بالمستقيم DE والنقطة F نقطة K متساوية البعد عن النقاط الخارجية الثلاث A, B, C (الشكل ١١٤٦) .

٥٤٩ - عين على المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين DE, FK النقطة M المتساوية البعد عن ثلاث نقاط خارجية A, B, C (الشكل ١١٤٧) .

٥٥٠ - عين على المستوي المعطى بالمستقيمين المتقاطعين DE, EF النقطة K المتساوية البعد عن ثلاث نقاط خارجية A, B, C (الشكل ١١٤٨) .

٥٥١ - أنشئ المثل الهندسي في الفراغ لنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB, AC (الشكل ١١٤٩) .

٥٥٢ - أنشئ في المستوي P المثل الهندسي لنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB, AC (الشكل ١١٥٠) .

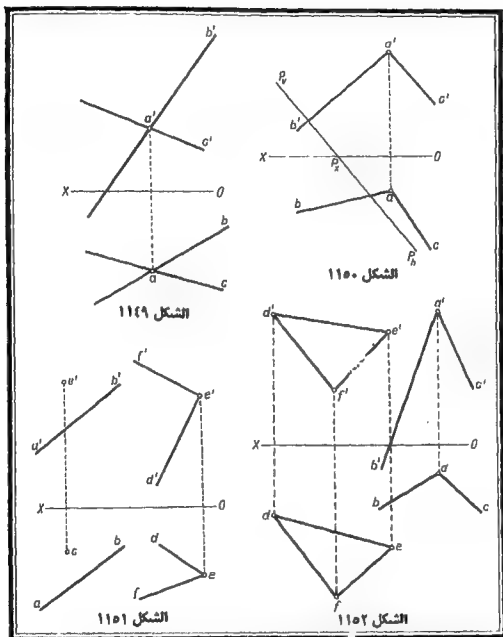
٥٥٣ - أنشئ في المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C المثل الهندسي لنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين DE, EF (الشكل ١١٥١) .

٥٥٤ - أنشئ في مستوي المثل DEF المثل الهندسي لنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB, AC (الشكل ١١٥٢) .

٥٥٥ - أنشئ في المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين DE, FK المثل الهندسي لنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB, AC (الشكل ١١٥٣) .

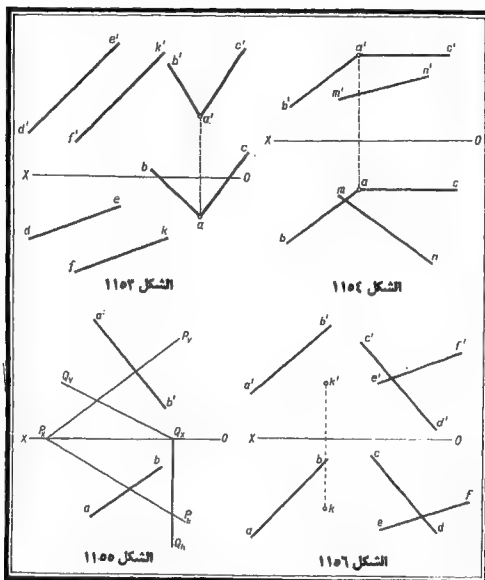
٥٥٦ - عين على المستقيم الخارجي MN نقطة متساوية البعد عن المستقيمين المتقاطعين AB, AC (الشكل ١١٥٤) .

٥٥٧ - أنشئ المثل الهندسي في الفراغ لنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٥٩٦، ٥٩٧) .



٥٥٨ - أنشئ في المستوي Q المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٣٩٤، ٣٩٣).

٥٥٩ - أنشئ في المستوي المعطى بمقتعين متوازيين AB, CD المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٦٠٢).



٥٦٠ - أنشئ في مستوي الثلث ABC المحل الهندسي لتقاط المساوية البعد

عن آثار المستوي P (الشكل ٦٠٣ ، ٤٧٤) .

٥٦١ - أنشئ في المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C المحل الهندسي

للتقاط المساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٦٠١) .

٥٦٢ - عين على المستقيم AB من المستوي P نقطة متساوية البعد عن آثار ذلك المستوي (الشكل ٣٤٠، ٣٤١) .

٥٦٣ - عين على المستقيم الخارجي AB نقطة متساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٤٩٩) .

٥٦٤ - أنشئ المثل الهندسي في الفراغ لتقاط المتساوية البعد عن المستويين P, Q (الشكل ٣٩٣، ٣٩٤) .

٥٦٥ - أنشئ في المستوي P المثل الهندسي لتقاط المتساوية البعد عن المستويين Q, R (الشكل ١١١٥، ١١١٦) .

٥٦٦ - عين على المستقيم AB نقطة متساوية البعد عن المستويين P, Q (الشكل ١١٥٥) .

٥٦٧ - أنشئ من النقطة K مستويًا يميل ميلًا واحدًا على مستويي الإسقاط بحيث ينطبق مقطع المستقيمين المتوازيين AB, CD على هذا المستوي في خط مستقيم واحد (الشكل ٦٤٣) .

٥٦٨ - أنشئ من النقطة K مستويًا موازيًا للمستقيم EF بحيث ينطبق مقطع المستقيمين المتوازيين AB, CD على هذا المستوي في خط مستقيم واحد (الشكل ٥٢٦) .

٥٦٩ - أنشئ من المستقيم EF مستويًا بحيث ينطبق مقطع المستقيمين المتوازيين AB, CD على هذا المستوي في خط مستقيم واحد (الشكل ٥٣١) .

٥٧٠ - أنشئ من النقطة K مستويًا يميل ميلًا واحدًا على مستويي الإسقاط بحيث يكون مقطعًا مستقيمين اختياريين AB, CD على هذا المستوي بشكل مستقيمين متوازيين (الشكل ١١٢٣) .

٥٧١ - أنشئ من المستقيم AB متوازيًا بحيث يكون مقطعًا مستقيمًا اختياريين CD, EF على هذا المستوي بشكل مستقيمين متوازيين (الشكل ١١٢٤) .

٥٧٢ - أنشئ من النقطة K متوازيًا موازيًا للمستقيم AB بحيث يكون مقطعًا مستقيمًا اختياريين CD, EF على هذا المستوي بشكل مستقيمين متوازيين (الشكل ١١٥٦) .

٥٧٣ - عين نقطة متساوية البعد عن أربع نقاط اختيارية في الفراغ A, B, C, D (الشكل ٢٥١) .

٥٧٤ - عين على المستوي P نقطة متساوية البعد عن النقطة P_1 وعن آثار المستقيم AB الواقع في هذا المستوي (الشكل ٣٤٠، ٣٤١) .

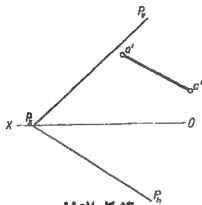
٥٧٥ - أنشئ في المستوي P مثلثًا قائمًا ABC ذروته القائفة B على الأثر الأفقي للمستوي إذا علم المقطع الشاقولي للضلع AC (الشكل ١١٥٧) .

٥٧٦ - أنشئ في المستوي P ومن نقطة A منه مستقيمًا بشكل مع آثار هذا المستوي زوايا متساوية θ (الشكل ٣٥٢، ٣٥٣) .

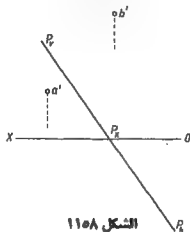
٥٧٧ - عين على المستوي P نقطة تبعد عن نقاطه A, B المسافات $20, 80 \text{ mm}$ (الشكل ١١٥٨) . ما هي الحالات الممكنة ؟

٥٧٨ - عين على المستوي P نقطة تبعد عن نقطة منه C مسافة 20 mm وعن مستقيم منه AB مسافة 10 mm (الشكل ١١٥٩) . ما هي الحالات الممكنة ؟

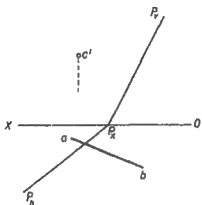
٥٧٩ - أنشئ في المستوي P ومن نقطة A منه مستقيمًا يبعد عن نقطة أخرى منه C مسافة 20 mm (الشكل ١١٦٠) .



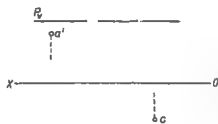
الشكل ١١٥٧



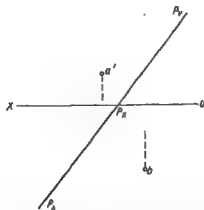
الشكل ١١٥٨



الشكل ١١٥٩

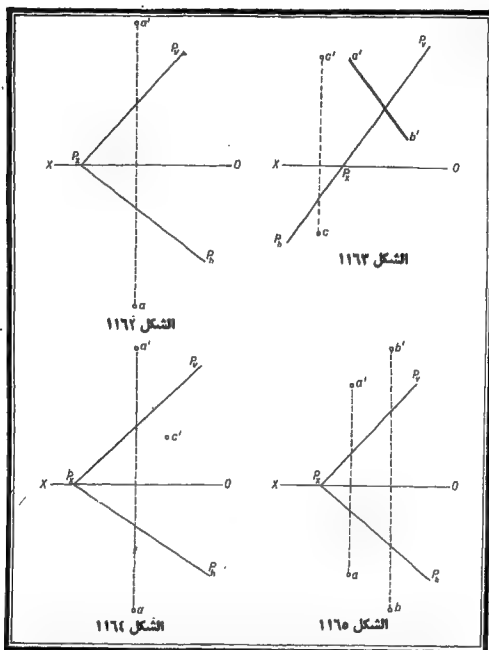


الشكل ١١٦٠



الشكل ١١٦١

٢ ٢ ٢



٥٨٠ - أنشئ في المستوي P مستقيماً يبعد عن النقطتين A, B منه بالمساوات

20,15 mm (الشكل ١١٦١) .

٥٨١ - أنشئ في المستوي P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن نقطة خارجية A

مسافة 60 mm (الشكل ١١٦٢) .

٥٨٢ - عين على المستقيم AB من المستوي P نقطة تبعد عن نقطة خارجية C مسافة قدرها 60 mm (الشكل ١١٦٣).

٥٨٣ - عين على المستوي P نقطة تبعد عن نقطة C من هذا المستوي مسافة قدرها 15 mm وعن نقطة خارجية A مسافة 60 mm (الشكل ١١٦٤).

٥٨٤ - عين على المستوي P نقطة تبعد عن النقطتين الخارجيتين A, B المسافتين l_1, l_2 (الشكل ١١٦٥).

٥٨٥ - أنشئ من النقطة M مستقيماً يقطع في النقطتين K, L المستقيم AB والمستوي P بشرط أن يكون $MK=KL$ (الشكل ١١٦٦).

٥٨٦ - أنشئ مثلثاً متساوي الساقين ABC ذروته C على المستوي P إذا علمت أن ارتفاعه يساوي 40 mm (الشكل ١١٦٧).

٥٨٧ - أنشئ مثلثاً متساوي الأضلاع ABC إذا كانت ذروته C تقع على المستوي P (الشكل ١١٦٧).

٥٨٨ - أنشئ محرك النقطة C المتحركة حول المستقيم AB (الشكل ١١٦٨).

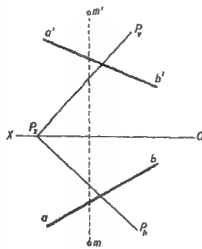
٥٨٩ - أنشئ محرك أقرب نقطة M من المستقيم AB الذي يدور حول مستقيم اختياري CD (الشكل ٥٧٨).

٥٩٠ - أنشئ مساقط موشور قائم ارتفاعه يساوي 60 mm علماً بأن قاعدته بشكل مربع ABCD قطره BD يقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٨).

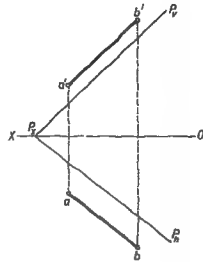
٥٩١ - أنشئ مساقط موشور قائم ارتفاعه يساوي 60 mm علماً بأن قاعدته بشكل مثلث متساوي الساقين ABC ذروته A تقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٢).

٥٩٢ - أنشئ مساقط مكعب قاعدته ABCD بحيث يقع الضلع BC على المستقيم BM إذا عرفت القطعة AB والمسقط الأفقي للمستقيم العمودي عليها

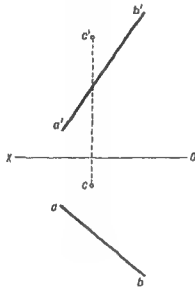
BM (الشكل ١١٦٩).



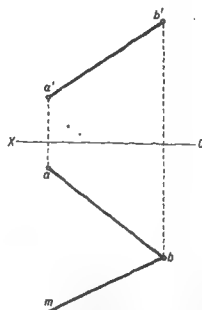
الشكل ١١٦٦



الشكل ١١٦٧



الشكل ١١٦٨



الشكل ١١٦٩

٢٩٣- أنشئه هراماً $SABC$ ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ علماً بأن قاعدته بشكل مثلث متساوي الساقين ABC ذروته A تقع على المستقيم EF أما مقطع ذروته S على قاعدته فينطبق مع مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC (الشكل ٦٦١).

٥٩٤ - أنشئ مساقط الهرم SABC علماً بأن طول حرفه الجانبي SA يساوي 65 mm أما مسقط ذروته S على القاعدة فينطبق مع مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٩٥ - أنشئ مساقط الهرم SABC ذو الارتفاع $h = 60 \text{ mm}$ إذا علمت أن مسقط ذروته S على القاعدة ينطبق مع مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٩٦ - أنشئ مساقط الهرم SABC إذا علمت أن مسقط ذروته S على القاعدة ينطبق مع مركز ثقل سطح القاعدة وأن الحرف الجانبي SC يميل على مستوي القاعدة بزاوية قدرها 60° (الشكل ١٦٣) .

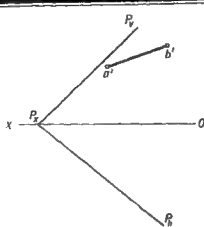
٥٩٧ - أنشئ مساقط موشور منتظم قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته ABC على المستوي P إذا علمت المسقط الشاقولي للضلع AB من قاعدته (الشكل ١١٧٠) .

٥٩٨ - أنشئ مساقط موشور قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته ABC على المستوي R إذا عرف مطبق القاعدة على المستوي H (الشكل ١١٧١) .

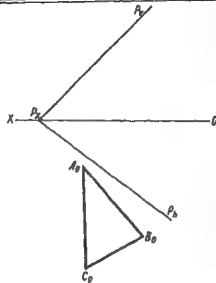
٥٩٩ - أنشئ مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت المسقط الشاقولي للضلع BC من قاعدته (الشكل ١١٧٢) .

٦٠٠ - أنشئ مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت المسقط الأفقي للقطر BD من قاعدته (الشكل ١١٧٣) .

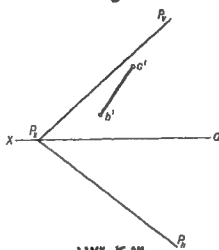
٦٠١ - أنشئ مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت مطبق الضلع



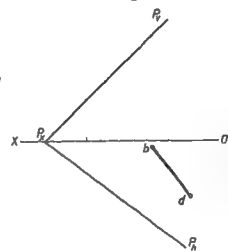
الشكل ١١٧٠



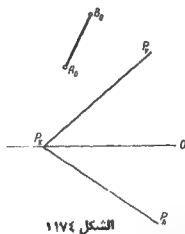
الشكل ١١٧١



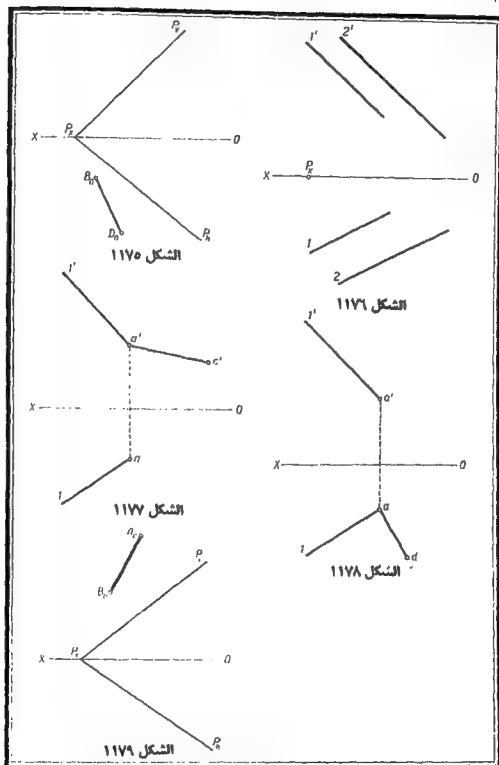
الشكل ١١٧٢



الشكل ١١٧٣



الشكل ١١٧٤



AB من قاعدته على المستوي V (الشكل ١١٧٤) .

٦٠٢ - أنشئ مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت مطبق
قطر قاعدته BD على المستوي H (الشكل ١١٧٥) .

٦٠٣ - أنشئ مساقط موشور مثلثي منتظم قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ إذا
علمت أن اثنين من حروفه الجانبية ينطبقان مع المستقيمين المفروضين
(1,1')، (2,2') والنقطة P_2 - نقطة تلاقي آثار مستوي القاعدة
(الشكل ١١٧٦) .

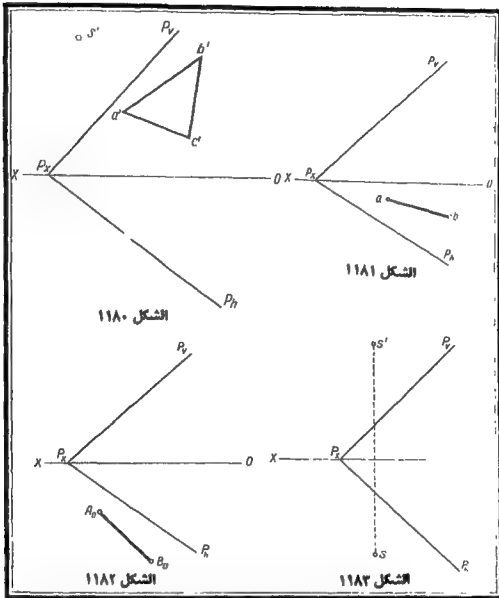
٦٠٤ - أنشئ مساقط مكعب قاعدته ABCD إذا علمت أن أحد حروفه
الجانبية ينطبق مع المستقيم (1,1') وإذا علم المسقط الشاقولي لقطعة AC
العمودية عليه (الشكل ١١٧٧) .

٦٠٥ - أنشئ مساقط موشور قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ إذا علمت أن قاعدته
بشكل مربع ABCD وأن أحد حروفه الجانبية ينطبق مع المستقيم
المفروض (1,1') وإذا علم المسقط الأفقي لقطعة AB العمودية على المستقيم
(1,1') (الشكل ١١٧٨) .

٦٠٦ - أنشئ مساقط هرم مثلثي قاعدته ABC تقع على المستوي P إذا علمت
مطبق الضلع AB من قاعدته على المستوي V (الشكل ١١٧٩) .

٦٠٧ - أنشئ مساقط هرم مثلثي ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته ABC على المستوي
P إذا عرفت المساقط الشاقولية لقاعدته وذروته S (الشكل ١١٨٠) .

٦٠٨ - أنشئ مساقط هرم مثلثي منتظم قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته
ABC على المستوي P إذا علمت المسقط الأفقي للضلع AB من قاعدته
(الشكل ١١٨١) .



٦٠٩ - أنشئه مساقط هرم منتظم قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته ABC على المستوي P إذا عرفت مطابق الضلع AB من قاعدته على المستوي H (الشكل ١١٨٢) .

٦١٠ - أنشئ مساقط مخروط دائري قائم قاعدته تقع في المستوى P ونصف قطرها 20 mm إذا علمت النقطة S ذروة المخروط (الشكل ١١٨٣) .

٦١١ - أنشئ المحل الهندسي في الفراغ للمستقيمت المارة من النقطة S والتي تميل على المستوي P بزاوية مفروضة قدرها φ (الشكل ١١٨٣) .

٦١٢ - أنشئ مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته تقع على المستوي P ونصف قطرها 20 mm إذا علمت المسقط الشاقولي لمركز القاعدة (الشكل ١١٨٤) .

٦١٣ - أنشئ مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ وقاعدته تقع على المستوي P ونصف قطرها 20 mm إذا عرفت مطبق النقطة C - مركز قاعدته - على المستوي H (الشكل ١١٨٥) .

٦١٤ - أنشئ مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ ومحوره يقع على مستقيم مفروض $(1,1')$ إذا علمت مطبق النقطة A من دائرة قاعدته على المستوي H والنقطة P_2 نقطة تلاقي آثار مستوي القاعدة (الشكل ١١٨٦) .

٦١٥ - أنشئ مساقط مخروط دائري ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ بقاعدته تقع على المستوي P ونصف قطرها 20 mm أما محوره فيقع على مستقيم مفروض $(1,1')$ إذا علمت النقطة P_2 نقطة تلاقي آثار مستوي القاعدة (الشكل ١١٨٧) .

٦١٦ - أنشئ مساقط مخروط دائري ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ ومحوره يتوضع على مستقيم مفروض $(1,1')$ إذا علمت النقطة C مركز قاعدته ذات نصف القطر 20 mm (الشكل ١١٨٨) .

٦١٧ - أنشئ مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60 \text{ mm}$ ومحوره يتوضع على مستقيم مفروض ($1,2'$) إذا كانت النقطة A تقع على دائرة قاعدة المخروط (الشكل ١١٨٩) .

٦١٨ - أنشئ الهرم SABC إذا عرفت قاعدته ABC وأطوال الحروف الجانبية: $SA = 55 \text{ mm}$, $SB = 60 \text{ mm}$, $SC = 60 \text{ mm}$ (الشكل ١١٩٠) .
(حل المسألة باستخدام انفراد سطح الهرم) .

٦١٩ - أنشئ في المستوي P مستقيماً يقطع خط الأرض مشكلاً زاوية قدرها 30° (الشكل ١١٩١) .

٦٢٠ - أنشئ من النقطة S من المستوي P مستقيماً يشكل مع المستوي H زاوية قدرها 60° (الشكل ١١٩٢) .

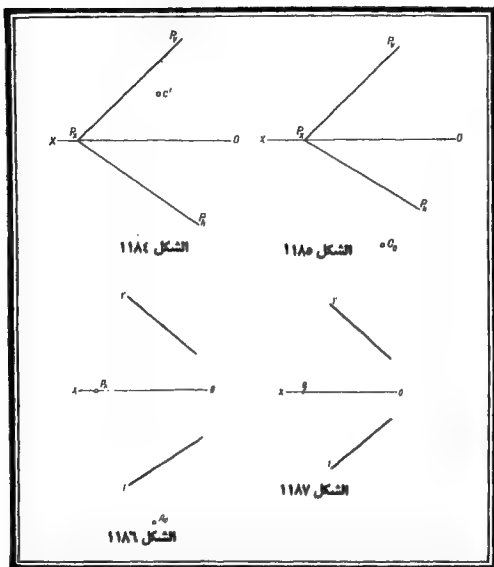
٦٢١ - أنشئ من النقطة S مستقيماً يوازي المستوي P ويشكل مع المستوي V زاوية قدرها 60° (الشكل ١١٩٣) .

٦٢٢ - أنشئ من النقطة S مستقيماً يوازي المستوي P ويشكل مع المستقيم AB زاوية قدرها 80° (الشكل ١١٩٤) .

٦٢٣ - أنشئ المستوي Q الموازي للمستوي P ولقاطع الكرة وفق دائرة نصف قطرها $r = 20 \text{ mm}$ (الشكل ١١٩٥) .

٦٢٤ - عين على المستقيم AB التقاط التي تبعد عن النقطة C بالمقدار 25 mm (الشكل ١١٩٦) . (استخدم المحل الهندسي للتقاط) .

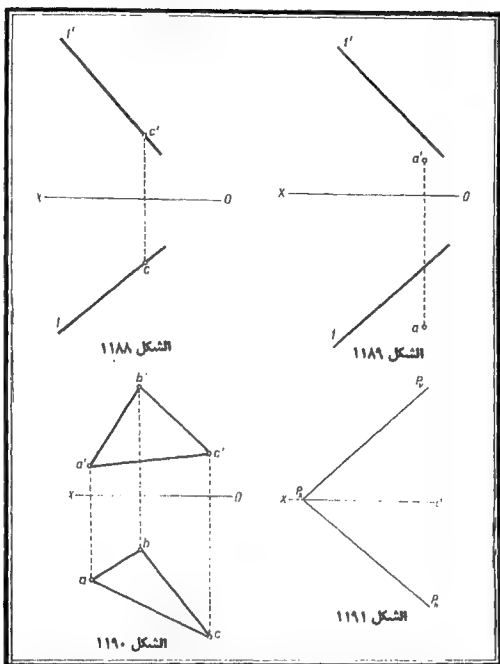
٦٢٥ - أنشئ من النقطة S مستقيماً يقطع المستقيم AB ويشكل مع المستوي P زاوية قدرها 60° (الشكل ١١٩٧) .



٦٢٦- عين على المستقيم CD نقطة تبعد عن المستقيم AB مسافة 20 mm
(الشكل ١١٩٨) .

٦٢٧- أنشئ من النقطة S مستقيماً يقطع المستقيم CD ويشكل مع المستقيم AB
زاوية قدرها 30° (الشكل ١١٩٩) .

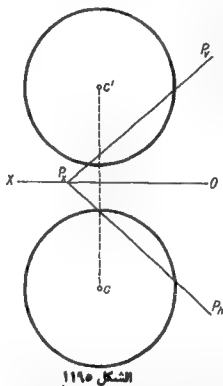
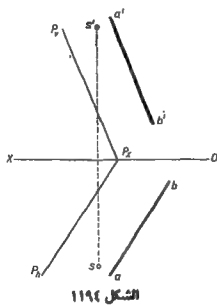
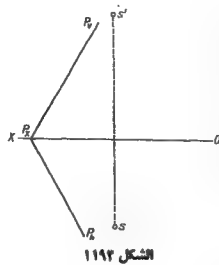
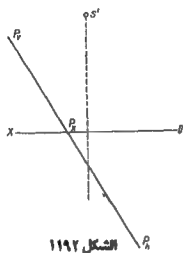
٦٢٨- أنشئ ممثلاً قائماً CDK ذروته القاعة K تقع على المستقيم AB
(الشكل ١٢٠٠) .

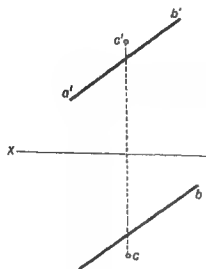


٦٢٩ - أنشئ مساقط كرة نصف قطرها $r = 20 \text{ mm}$ تمس كرة مفروضة إذا علمت أن مركز الكرة المنشودة يقع على المستقيم AB (الشكل ١٢٠١).

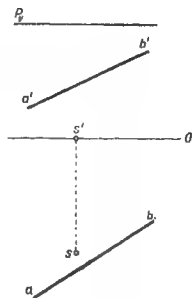
٦٣٠ - أنشئ من المستقيم AB مستويًا يشكل مع المستوي H زاوية قدرها 60°

(الشكل ١٢٠٢) .

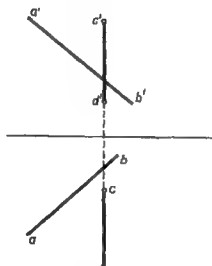




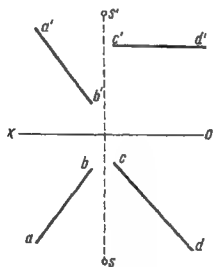
الشكل ١١٩٦



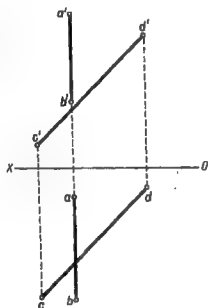
الشكل ١١٩٧



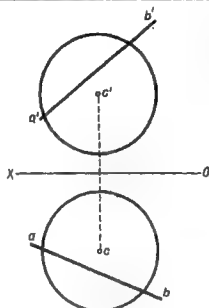
الشكل ١١٩٨



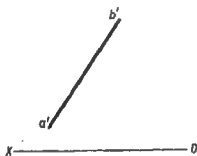
الشكل ١١٩٩



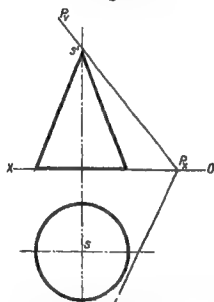
الشكل ١٢.٠



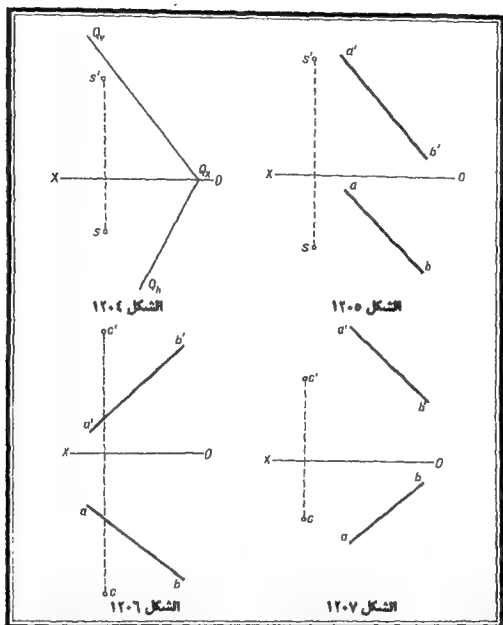
الشكل ١٢.١



الشكل ١٢.٢



الشكل ١٢.٣



٦٣١ - أنشئ آخر المستوي Q المماس لسطح القروط والعمودي على المستوي P (الشكل ١٢.٣) .

٦٣٢ - أنشئ من النقطة S مستويًا P ميل على المستوي H بزاوية مفروضة قدرها θ ويتعامد مع المستوي Q (الشكل ١٢٠٤) .

٦٣٣ - أنشئ من النقطة S مستويًا P ميل على المستوي H بزاوية مفروضة قدرها θ ويوازي المستقيم AB (الشكل ١٢٠٥) .

٦٣٤ - أنشئ من النقطة C مستويًا P يبعد عن المستقيم AB مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢٠٦) .

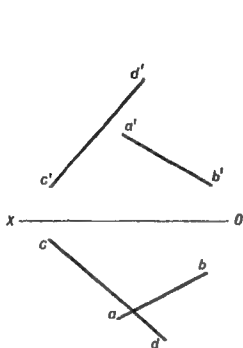
٦٣٥ - أنشئ من المستقيم AB مستويًا P يبعد عن النقطة C مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢٠٧) .

٦٣٦ - أنشئ مساقط اسطوانة دائرية قائمة محورها ينطبق مع المستقيم CD إذا كان المستقيم AB مماساً لهذه الاسطوانة (الشكل ١٢٠٨) .

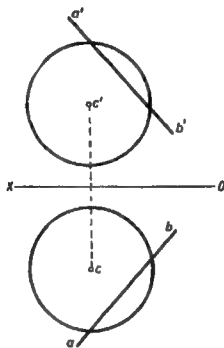
٦٣٧ - أنشئ من المستقيم AB مستويًا يقطع الكرة وفق دائرة نصف قطرها $r = 20$ mm (الشكل ١٢٠٩) .

٦٣٨ - أنشئ من النقطة M مستويًا يوازي المستقيم AB ويبعد عن النقطة C مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢١٠) .

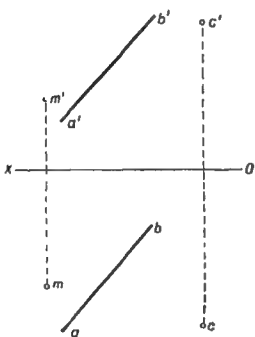
٦٣٩ - أنشئ من المستقيم AB مستويًا P يبعد عن المستقيم CD مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢١١) .



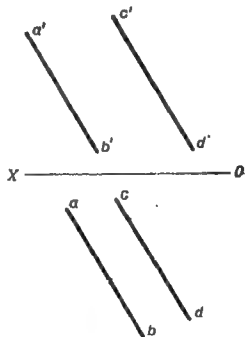
الشكل ١٢٠٨



الشكل ١٢٠٩



الشكل ١٢١٠



الشكل ١٢١١

القهر من

أرقام الأمتة
أرقام المسائل الصفحة
المحلولة

المقدمة

الفصل الأول :

٤	-	-	: المفاهيم الأساسية للإسقاط القائم	البحث الأول
٦	٧- ١	٥- ١	: النقطة	البحث الثاني
١٥	١٠- ٨	-	: المستقيم	البحث الثالث
			: الإسقاط على مستويات،	البحث الرابع
٢١	٢٦- ١١	١١- :	الإسقاط الثلاث	
			: الوضعية المشتركة	البحث الخامس
٣٧	٣٢- ٢٧	١٨- ١٢	للمستقيم والنقطة	
٤٤	٤٢- ٣٣	٢٢- ١٩	: آثار المستقيم	البحث السادس
			: الوضعية المشتركة	البحث السابع
٥١	٤٩- ٤٣	٣٢- ٢٣	للمستقيمتين في الفراغ	
			: طول قطعة من مستقيم	البحث الثامن
			وزوايا ميل المستقيم على	
٦٧	٩٠- ٥٠	٤٢- ٣٣	مستويات الإسقاط	
٧٨	٩٤- ٩١	٤٣	: تقييم قطعة بنسبة معينة	البحث التاسع

أرقام الأمثلة	أرقام المسائل	الصفحة
٤٤ - ٤٧	٩٥ - ١٦٢	٨٠
بعض حالات إسقاط الزوايا		
البحث العاشر		

الفصل الثاني :

٤٨ - ٥٦	١٦٣ - ١٧٩	١٠٦
البحث الحادي عشر : المستوي		
البحث الثاني عشر : إسطاء المستوي بآثاره .		
٥٧ - ٩٤	١٨٠ - ٢١٦	١١٧
المستقيم والنقطة في المستوي		
البحث الثالث عشر : تقاطع المستويات المعينة		
٩٥ - ١١٢	٢١٧ - ٢١٨	١٦٢
بآثارها		
١١٣ - ١٣٨	٢١٩ - ٢٢٢	١٨٣
البحث الرابع عشر : تقاطع مستقيم مع مستوي		
البحث الخامس عشر : توازي مستقيم مع مستوي .		
١٣٩ - ١٥٣	٢٢٣ - ٢٥٠	٢٠٦
توازي المستويات		
البحث السادس عشر : تعامد مستقيم مع مستوي		
١٥٤ - ١٨٥	٢٥١ - ٢٧٠	٢٢٩
تعامد المستويات		

الفصل الثالث :

البحث السابع عشر : الدوران، الانتقال الموازي		
١٨٦ - ٢١٠	٣٧١ - ٣٨٣	٢٨٣
لمستويات الإسقاط		
البحث الثامن عشر : الانطباق، الدوران حول		
٢١١ - ٢٣٢	٣٨٤ - ٤١٢	٣٠٩
مستقيم أفقي وجبهي .		
٢٣٣ - ٢٤٩	٤١٣ - ٤٣٧	٣٤٠
تبديل مستويات الإسقاط		
٢٥٠ - ٢٥٩	٤٣٨ - ٤٥٧	٣٦١
تعيين الأبعاد		
٢٦٠ - ٢٦٤	٤٥٨ - ٤٦٦	٣٨٣
تعيين الزوايا		
البحث الحادي والعشرون : تعيين الزوايا		

أرقام الأمتة أرقام المسائل الصفحة
المحلولة

الفصل الرابع :

البحث الثاني والعشرون : تقاطع كثيرات الوجوه
مع مستوي . انفرادات

كثيرات الوجوه . ٢٧٤-٢٦٥ ٤٦٧ ٣٩٢

البحث الثالث والعشرون : الوضعية المشتركة

لمستوي وسطح ٣٠٨-٢٧٥ ٤٨٦-٤٦٨ ٤١٧

البحث الرابع والعشرون : انفراد السطوح ٣١٧-٣٠٩ ٤٨٧-٤٨٨ ٤٦٧

البحث الخامس والعشرون : تقاطع مستقيم مع سطح ٣٣٣-٣١٨ ٤٨٩ ٤٨٠

البحث السادس والعشرون : تقاطع السطوح ٣٤٤-٣٣٤ ٤٩٧-٤٩٠ ٥٠١

الفصل الخامس :

البحث السابع والعشرون : مسائل مختلفة (لجميع
الفصول) . ٤٩٨-٦٣٩ ٥٣٣



صدر بإشراف لجنة الإنجاز

سعر المبيع للطالب (٢٣٠) ل.س